

**49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008**

Miercuri 16 iulie, 2008

Problema 1. Într-un triunghi ascuțitunghic ABC se notează cu H ortocentrul său. Cercul cu centrul în mijlocul segmentului BC și care trece prin H intersectează dreapta BC în A_1 și A_2 . Analog, cercul cu centrul în mijlocul segmentului CA și care trece prin H intersectează dreapta CA în B_1 și B_2 , iar cercul cu centrul în mijlocul laturii AB și care trece prin H intersectează dreapta AB în punctele C_1 și C_2 . Arătați că punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sunt conciclice.

Problema 2. (a) Arătați că inegalitatea

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$$

are loc pentru orice numere reale x, y, z , diferite de 1, ce satisfac relația $xyz = 1$.

(b) Demonstrați că există o infinitate de triplete de numere raționale x, y, z , ce verifică relația $xyz = 1$, pentru care mai sus are loc egalitate.

Problema 3. Demonstrați că există o infinitate de numere naturale n astfel încât numărul $n^2 + 1$ are un factor prim strict mai mare decât $2n + \sqrt{2n}$.

49th INTERNATIONAL MATHEMATICAL OLYMPIAD
MADRID (SPAIN), JULY 10-22, 2008

Joi 17 iulie, 2008

Problema 4. Găsiți toate funcțiile $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ pentru care

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

pentru orice numere reale strict pozitive w, x, y, z , având proprietatea $wx = yz$.

Problema 5. Fie n și k numere naturale nenule astfel încât $k \geq n$ și $k - n$ număr par. Considerăm $2n$ becuri notate $1, 2, \dots, 2n$ ce se pot afla în stările *aprins* sau *stins*. La început toate becurile sunt în starea stins. Considerăm secvențe de *pași*: la fiecare pas unul și numai un bec este aprins dacă era stins, sau stins dacă era aprins.

Fie N numărul de astfel de secvențe, formate din k pași, ce duc la starea în care becurile de la 1 la n sunt toate aprinse, iar becurile de la $n + 1$ la $2n$ sunt toate stinse.

Fie M numărul de astfel de secvențe, formate din k pași, ce duc la starea în care becurile de la 1 la n sunt toate aprinse, iar becurile de la $n + 1$ la $2n$ sunt toate stinse, dar nici unul dintre becurile de la $n + 1$ la $2n$ nu a fost aprins pe parcursul secvenței.

Aflați numărul N/M .

Problema 6. Fie $ABCD$ un patrulater convex cu $|BA| \neq |BC|$. Notăm cercurile înscrise în triunghiurile ABC și ADC cu ω_1 și ω_2 . Presupunem că există un cerc ω tangent la semidreptele $(BA$ dincolo de A și $(BC$ dincolo de C , și la dreptele AD și CD . Demonstrați că tangentele exterioare comune cercurilor ω_1 și ω_2 se intersectează pe ω .