Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a X-a, Etapa a II-a, 23 februarie 2013

Clasa a V-a

I. Efectuați calculele:

(4p) **a)** $(99 \cdot 98 + 99 \cdot 3 - 99)^2 : (3^2 \cdot 11)^2$

(5p) **b)** $8^8 : 4^4 : 2^2 - 2^{14}$

II. Numerele $1, 2, 3, \dots, 2013$ sunt așezate într-un tabel astfel:

1
2 3
4 5 6
7 8 9 10
....

(3p) **a)** Să se demonstreze că numărul 2013 se află pe linia 63.

(3p) **b)** Să se afle câte numere conține a 63-a linie.

(3p) **c)** Să se afle câte linii conțin cel puțin un număr divizibil cu 19.

Traian Preda

III. *(4p)* **a)** Fie $a \in \mathbb{N}$. Să se arate că numărul format din alăturarea numerelor $a,\ a+1$ și $a+2$ în orice ordine, se divide cu 3.

(5p) **b)** Se consideră numărul

$$n = 1234 \dots 201120122013$$

format din alăturarea primelor 2013 numere naturale, în ordine crescătoare. Să se arate că n este divizibil cu 3.

N.M. Goșoniu

IV. *(4p)* **a)** Determinați numerele $\overline{8xy9}$ care dau restul 11 prin împărțirea la 27.

(5p) **b)** Arătați că

$$359^{953} > 953^{359}.$$

Vasile Tarciniu

__Notă__: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1p la 10p. La fiecare subiect se acordă 1p din oficiu. Punctajul maxim la o problemă se acordă pentru rezolvare corectă, completă și cu explicații clare. Timp de lucru:2 ore și 30 minute.

Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a X-a, Etapa a II-a, 23 februarie 2013

Clasa a VI-a

I. Se consideră numerele

$$a=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{9} \text{ și } b=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

(4p) **a)** Comparați numerele a și b.

(5p) **b)** Calculați: $(3a+b):(a+4b)$.

II. Fie $n=201320122011\ldots1098\ldots4321$ format din alăturarea primelor 2013 numere naturale nenule scrise în ordine descrescătoare.

(4p) **a)** Să se afle restul împărțirii lui n la 3 și să se stabilească dacă n poate fi pătrat perfect.

(5p) **b)** Să se afle restul împărțirii lui n la 45.

N.M. Goșoniu

III. *(9p)* Se consideră triunghiul isoscel ABC $(AB\equiv AC)$ și punctele $D\in BC,\ E\in AB$ astfel încât C este mijlocul segmentului BD și B este mijlocul segmentului AE. Dacă notăm $EC\cap AD=\{M\}$, să se demonstreze că $\Delta\, CMD$ este isoscel.

Traian Preda

IV.*(9p)* Se consideră unghiurile adiacente și cu interioare disjuncte

$$\sphericalangle A_1OA_2, \sphericalangle A_2OA_3, \sphericalangle A_3OA_4, \ldots, \sphericalangle A_{n-1}OA_n$$

care au măsurile numere prime distincte și astfel încât $\sphericalangle A_1OA_n$ să fie alungit.

Fie $[OB_1, [OB_2, \ldots, [OB_{n-1}$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle A_1OA_2, \sphericalangle A_2OA_3, \ldots, \sphericalangle A_{n-1}OA_n$. Să se afle valoarea maximă a numărului n știind că $m(\sphericalangle B_1OB_2), m(\sphericalangle B_2\,OB_3), \ldots, m(\sphericalangle B_{n-2}OB_{n-1})$ sunt numere prime.

Traian Preda

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1p la 10p. La fiecare subiect se acordă 1p din oficiu. Punctajul maxim la o problemă se acordă pentru rezolvare corectă, completă și cu explicații clare. Timp de lucru:2 ore și 30 minute.

Concursul Național de Matematică “Arhimede”

Ediția a X-a, Etapa a II-a, 23 februarie 2013

Clasa a VII-a

I. Se consideră numerele reale:

$$a = \sqrt{48}, \qquad b = \sqrt{75}, \qquad c = \sqrt{27}.$$

(3p) **a)** Calculați media aritmetică a numerelor a, b, c.

(3p) **b)** Calculați media geometrică a numerelor a și c.

(3p) **c)** Arătați că $(a + b)(b + c) \in \mathbb{N}$.

II. *(4p)* **a)** Aflați numerele $\overline{abc}$, știind că $\overline{abc}, \overline{bca}, \overline{cab}$ sunt direct proporționale cu numerele $9, 16, 12$.

Damian Marinescu, Tîrgoviște

(5p) **b)** Arătați că

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2^{4026}} > 2013.$$

III. Rombul $ABCD$ are $m(\sphericalangle A) = 60^o, AC \cap BD = \{O\}$, iar punctul E este simetricul lui B față de AD.

(3p) **a)** Să se arate că punctele C, D, E sunt coliniare.

(3p) **b)** Dacă $BE \cap AD = \{M\}$ și $OM = 6$ cm, calculați perimetrul patrulaterului $ABCE$.

(3p) **c)** Dacă notăm $EO \cap BC = \{P\}$ și $AC \cap BE = \{Q\}$ să se demonstreze că $PQ \parallel AB$.

IV. *(4p)* **a)** Fie triunghiul ABC. Să se arate că există o dreaptă unică $MN \parallel BC$, $M \in (AB), N \in (AC)$ astfel încât $\mathcal{P}_{(\Delta AMN)} = \mathcal{P}_{(\mathrm{MNCB})}$.

(5p) **b)** Fie triunghiul ABC astfel încât să existe o dreaptă $MN \parallel BC, M \in (AB), N \in (AC)$ cu proprietatea că $\Delta\, AMN$ și trapezul $MNCB$ au aceeași arie și același perimetru. Să se calculeze raportul $\frac{AI}{IA'}$, unde AA' este bisectoarea $\sphericalangle BAC$ iar I este centrul cercului înscris in triunghiul ABC.

Traian Preda

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1p la 10p. La fiecare subiect se acordă 1p din oficiu. Punctajul maxim la o problemă se acordă pentru rezolvare corectă, completă și cu explicații clare. Timp de lucru:3ore.

Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a X-a, Etapa a II-a, 23 februarie 2013

Clasa a VIII-a

I. Se consideră expresiile:

$$a = x^2 + 3x + 2, \qquad b = x^2 + 5x + 6, \qquad c = x^2 + 4x + 3.$$

(4p) **a)** Simplificați fracția $\frac{a}{b}$.

(5p) **b)** Pentru $x \in \mathbb{N}$ arătați că $\sqrt{abc} \in \mathbb{N}$.

II. *(4p)* **a)** Fie a și b două numere reale positive. Demonstrați că $a + b \geq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} + \sqrt{ab}$.

Ion Neață, Slatina

(5p) **b)** Dacă $a, b, x, y, z > 0$, atunci:

$$(x + y + az)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{b}{z}\right) \geq \left(\frac{x + y}{\sqrt{xy}} + \sqrt{ab}\right)^2$$

D.M. Bătinețu-Giurgiu

III. În planul (α) se consideră unghiul drept AOB, cu $OA = a$ și $OB = b$, a și b numere reale pozitive. Punctul M este mijlocul lui $[AB]$ iar în M se duce $MP \perp \alpha, MP = c, c > 0$.

(4p) **a)** Calculați distanța de la M la OP.

(5p) **b)** Determinați valoarea lui c în funcție de a și b pentru care M este centrul cercului circumscris triunghiului PAB.

Cristina Godeanu

IV. Fie $ABCD$ un tetraedru, M mijlocul muchiei AD. Bisectoarele unghiurilor $CMD, AMC,$ AMB și BMD intersectează muchiile CD, AC, AB respectiv BD, în punctele P, Q, R respectiv S. Să se demonstreze că:

(4p) **a)** Punctele P, Q, R, S sunt coplanare;

(5p) **b)** Punctele M, O, N sunt coliniare dacă și numai dacă $SPQR$ este paralelogram. (Am notat cu N mijlocul lui BC și $RP \cap SQ = \{O\}$.

Traian Preda

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 1p la 10p. La fiecare subiect se acordă 1p din oficiu. Punctajul maxim la o problemă se acordă pentru rezolvare corectă, completă și cu explicații clare. Timp de lucru: 3ore.