Olimpiada de matematică – clasa a VII-a
etapa zonală – 9 februarie 2013

SOLUȚII

1. Fie a,b,c numere naturale astfel încât $a\sqrt{2+\sqrt{3}}-b\sqrt{2-\sqrt{3}}-c\sqrt{2}=0$
Să se demonstreze că $\sqrt{bc}\in\mathbb{N}$

Rezolvare

$a\sqrt{2+\sqrt{3}}-b\sqrt{2-\sqrt{3}}-c\sqrt{2}=0 \Rightarrow a\sqrt{2+\sqrt{3}}-b\sqrt{2-\sqrt{3}}=c\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2(2+\sqrt{3})+b^2(2-\sqrt{3})-2ab\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=2c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(a^2+b^2-c^2-ab)+\sqrt{3}(a^2-b^2)=0 \Rightarrow (a^2+b^2-c^2-ab)=0$ și $(a^2-b^2)=0$

$\Rightarrow a=b=c$, deci $\sqrt{bc}=b\in\mathbb{N}$

2. Să se determine valoarea lui n, dacă

$$\frac{2}{3\cdot5}+\frac{4}{5\cdot9}+\frac{8}{9\cdot17}+\ldots+\frac{2^n}{\left(2^n+1\right)\left(2^{n+1}+1\right)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2^{2012}-1}{\left(2^{2013}+1\right)}.$$

Rezolvare

$$\frac{2}{3\cdot5}+\frac{4}{5\cdot9}+\frac{8}{9\cdot17}+\ldots+\frac{2^n}{\left(2^n+1\right)\left(2^{n+1}+1\right)}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{2^n+1}-\frac{1}{2^{n+1}+1}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2^{n+1}+1}=\frac{2(2^n-1)}{3(2^{n+1}+1)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2^{2012}-1}{\left(2^{2013}+1\right)}.$$ Rezultă $n=2012$

3. Tei persoane au cumpărat portocale dintr-un coș. Primul a cumpărat jumătatea portocalelor și o jumătate de portocală. Al doilea jumătate din portocalele rămase și o jumătate de portocală. Al treilea jumătate din ce a rămas și o jumătate de portocală. În coș au mai rămas 4 portocale. Câte portocale au fost în coș dacă nu s-a tăiat nicio portocală. Câte portocale au cumpărat fiecare?

Rezolvare

În coș au fost n portocale

$$n=\left\{\left[\left(4+\frac{1}{2}\right)\cdot2+\frac{1}{2}\right]\cdot2+\frac{1}{2}\right\}\cdot2=\left[\left(9+\frac{1}{2}\right)\cdot2+\frac{1}{2}\right]\cdot2=\left(19+\frac{1}{2}\right)\cdot2=39$$

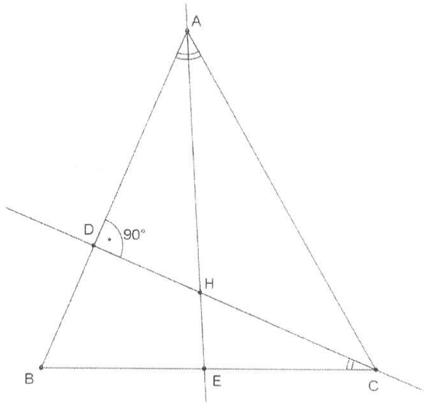
Primul a cumpărat 20 de portocale, al doilea 10 portocale, iar al treilea 5 portocale

4. În triunghiul ABC unghiul format de latura BC şi înălţimea CD este congruent cu unghiul format de latura AB şi bisectoarea AE a unghiului A şi $CD \bigcap AE = \{H\}$

a) Ce fel de triunghi este ABC?

b) Să se demonstreze că $BH \perp AC$

Rezolvare



a) $m(\widehat{B}) + m(\widehat{BAE}) = m(\widehat{B}) + m(\widehat{BCD}) = 90^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow m(\widehat{BEA}) = 90^0 \Rightarrow \Delta AEB \equiv \Delta AEC \Rightarrow (AB) \equiv (AC)$

deci ΔABC este isoscel

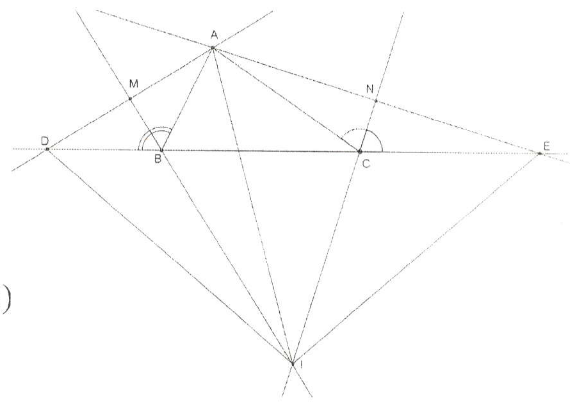
b) H este ortocentrul triunghiului ABC $\Rightarrow BH \perp AC$

5. În triunghiul ABC din punctul A ducem perpendicularele pe bisectoarele exterioare ale unghiurilor B şi C. Picioarele perpendicularelelor fie M respectiv N şi $BM \cap CN = \{I\}$.

a) Să se demonstreze că AI este bisectoarea unghiului A

b) Să se demonstreze că $MN = \dfrac{A_{ABC}}{2}$.

Rezolvare



a) $\left.\begin{array}{c} \widehat{ABM} \equiv \widehat{DBM} \\ BM \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BMA \equiv \Delta BMD \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (MA) \equiv (MD) \\ (BA) \equiv (BD)\ (1) \end{cases}$

$\left.\begin{array}{c} (MA) \equiv (MD) \\ IA \perp AD \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta IMA \equiv \Delta IMD \Rightarrow (ID) \equiv (IA)\ (2)$

(1), (2) $\Rightarrow \Delta IBD \equiv \Delta IBA \Rightarrow \widehat{IDB} \equiv \widehat{IAB}$

La fel se demonstrează că $(CA) \equiv (CE), (IA) \equiv (IE)$ şi $\widehat{IAC} \equiv \widehat{IEC}$

Din $(ID) \equiv (IA) \equiv (IE) \Rightarrow \widehat{IDB} \equiv \widehat{IEC}$, deci şi $\widehat{IAB} \equiv \widehat{IAC}$

b) MN este linie mijlocie în ΔADE

$\Rightarrow MN = \dfrac{DE}{2} = \dfrac{DB + BC + CE}{2} = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = \dfrac{A_{ABC}}{2}$