Olimpiada de matematică – clasa a VI-a
etapa zonală – 9 februarie 2013

SOLUȚII

1. Să se arate că dacă $a+3b+5c+7d$ este divizibil cu 17, atunci și $53a+57b+61c+65d$ este divizibil cu 17.

Rezolvare

$53a+57b+61c+65d=17\cdot(3a+3b+3c+3d)+2\cdot(a+3b+5c+7d)$, dar

$17|(a+3b+5c+7d)\Rightarrow 17|(53a+57b+61c+65d)$

2. Știind că $\overline{abc}$ este cel mai mic număr natural divizibil cu 35 și 45, iar $\overline{abc}-\overline{bcd}$ este divizibil cu 9, să se determine numărul $\overline{abcd}$.

Rezolvare

$\overline{abc}=[35,45]=315\Rightarrow a=3,b=1,c=5$

$315-\overline{15d}=165-d=9\cdot18+3-d,\ 9|(9\cdot18+3-d)\Rightarrow d=3$

3. Raportul dintre numerele naturale a și b este $\dfrac{7}{12}$.

a) Să se arate că $\dfrac{8a-3b}{b-a}$ este pătrat perfect;

b) Să se afle numerele a și b, știind că suma pătratelor lor este 772.

Rezolvare

a) $a=\dfrac{7}{12}b$, atunci $\dfrac{8a-3b}{b-a}=\dfrac{8\cdot\dfrac{7}{12}b-3b}{b-\dfrac{7}{12}b}=\dfrac{56b-36b}{12b-7b}=\dfrac{20b}{5b}=4=2^2$

b) $\dfrac{a}{b}=\dfrac{7}{12}\Rightarrow\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{49}{144}\Rightarrow\dfrac{a^2+b^2}{b^2}=\dfrac{49+144}{144}\Rightarrow\dfrac{772}{b^2}=\dfrac{193}{144}\Rightarrow b^2=\dfrac{772\cdot144}{193}=4\cdot144$

$\Rightarrow b=24,a=14$

4. Fie perechile de unghiuri adiacente $\widehat{AOB}$ și $\widehat{BOC}$, respectiv $\widehat{BOC}$ și $\widehat{COD}$ astfel încât $m(\widehat{AOD})=180^o$.

a) Știind că unghiul format de bisectoarele unghiurilor $\widehat{AOB}$ și $\widehat{COD}$ are măsura de 120^o, să se afle $m(\widehat{BOC})$

b) Ştiind că $\frac{m(\widehat{AOB})}{m(\widehat{BOC})}=\frac{2}{3}$ şi $\frac{m(\widehat{BOC})}{m(\widehat{COD})}=\frac{3}{7}$, să se afle măsurile acestor unghiuri.

Rezolvare

a) $\frac{m(\widehat{AOB})}{2}+m(\widehat{BOC})+\frac{m(\widehat{COD})}{2}=120^0 \Rightarrow m(\widehat{AOB})+2\cdot m(\widehat{BOC})+m(\widehat{COD})=240^0$

$\Rightarrow 180^0+m(\widehat{BOC})=240^0 \Rightarrow m(\widehat{BOC})=60^0$

b) $180^0=m(\widehat{AOB})+m(\widehat{BOC})+m(\widehat{COD})=\frac{2}{3}m(\widehat{BOC})+m(\widehat{BOC})+\frac{7}{3}m(\widehat{BOC})=$

$=4m(\widehat{BOC})\Rightarrow m(\widehat{BOC})=45^0, m(\widehat{AOB})=30^0, m(\widehat{COD})=105^0$