

EXAMENUL NAȚIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT

18 Iulie 2013
Matematică

MODEL

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 4 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1. Se consideră polinomul $f = X^4 + \hat{2}X^2 + X + \hat{2} \in \mathbb{Z}_3[X]$.
- 5p a) Arătați că f este reducibil în $\mathbb{Z}_3[X]$.
- 5p b) Dați un exemplu de polinom $g \in \mathbb{Z}_3[X]$, ireducibil în $\mathbb{Z}_3[X]$ și care are aceeași funcție polinomială cu f .
2. Un hexagon inscriptibil are trei laturi de lungime a și trei laturi de lungime b .
- 5p a) Arătați că hexagonul are un unghi cu măsura de 120° .
- 5p b) Calculați, în funcție de a și b , raza cercului circumscris hexagonului.
3. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot \arctg x$.
- 5p a) Determinați $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care graficul funcției f_k are asimptotă spre $+\infty$.
- 5p b) Arătați că $(n+1) \int_0^1 f_n(x) dx + (n-1) \int_0^1 f_{n-2}(x) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Elaborați un item de tip întrebare structurată prin care să evaluați trei dintre competențele specifice precizate în următoarea secvență a programei școlare de matematică pentru clasa a IX-a:

Competențe specifice	Conținuturi
<ol style="list-style-type: none">1. Diferențierea, prin exemple, a variației liniare de cea pătratică2. Completarea unor tabele de valori necesare pentru trasarea graficului funcției de gradul al II-lea3. Aplicarea unor algoritmi pentru trasarea graficului funcției de gradul al II-lea (prin puncte semnificative)4. Exprimarea proprietăților unei funcții prin condiții algebrice sau geometrice5. Utilizarea relațiilor lui Viète pentru caracterizarea soluțiilor ecuației de gradul al II-lea și pentru rezolvarea unor sisteme de ecuații6. Identificarea unor metode grafice de rezolvare a ecuațiilor sau sistemelor de ecuații	<p>Funcția de gradul al II-lea</p> <ul style="list-style-type: none">• Reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, intersecția graficului cu axele de coordonate, ecuația $f(x) = 0$, simetria față de drepte de forma $x = m$, cu $m \in \mathbb{R}$• Relațiile lui Viète, rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$, cu $s, p \in \mathbb{R}$

(Programa școlară de matematică, OMECI nr.5099 / 09.09.2009)

În elaborarea itemului se vor avea în vedere următoarele aspecte:

- succesiunea subîntrebărilor să asigure creșterea treptată a gradului de dificultate
- fiecare subîntrebare să solicite un răspuns care nu depinde de răspunsul la subîntrebarea precedentă
- subîntrebările să fie în concordanță cu stimulul utilizat.

Notă. Se punctează și elaborarea detaliată a răspunsului așteptat, precum și corectitudinea științifică a informației matematice.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

Formele educației (educația formală, educația nonformală, educația informală): definirea, analiza și interdependența conceptelor.

EXAMENUL NAȚIONAL DE DEFINITIVARE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNT
18 Iulie 2013

Matematică

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

MODEL

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	a) Polinomul f are rădăcina $\hat{1}$ f se divide cu $X + \hat{2}$, deci f este reductibil în $\mathbb{Z}_3[X]$	3p 2p
	b) De exemplu, $g = X + \hat{2}$ și $g(\hat{0}) = f(\hat{0})$, $g(\hat{1}) = f(\hat{1})$, $g(\hat{2}) = f(\hat{2})$ grad $g = 1$, deci g este ireductibil	3p 2p
2.	a) Hexagonul are 3 laturi de lungime a și 3 laturi de lungime b , deci există un vârf din care pleacă o latură de lungime a și o latură de lungime b ; fie B acest vârf și A, C vârfurile hexagonului adiacente lui B pentru care $AB = a$, $BC = b$ Rezultă că arcul mic AC are măsura de 120° și deci $m(\sphericalangle ABC) = 120^\circ$	2p 3p
	b) Fie O centrul cercului circumscris hexagonului și R raza acestui cerc. Din teorema cosinusului aplicată în triunghiurile AOC și ABC rezultă că $AC^2 = 3R^2$ și $AC^2 = a^2 + b^2 + ab$ Finalizare: $R = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + ab}{3}}$	3p 2p
3.	a) Pentru $k \geq 2$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_k(x)}{x} = +\infty$, deci graficul funcției f_k nu are asimptotă spre $+\infty$	1p
	Pentru $k = 1$, $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ și	1p
	$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f_1(x) - \frac{\pi}{2} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}$	1p
	Din teorema lui l'Hospital, cum $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{1+x^2} = -1$, rezultă că $n = -1$ și dreapta $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ este asimptotă oblică a graficului funcției f_1 spre $+\infty$; f_k are asimptotă spre $+\infty \Leftrightarrow k = 1$	2p
b) $(n+1) \int_0^1 f_n(x) dx + (n-1) \int_0^1 f_{n-2}(x) dx = \int_0^1 \left((n+1)x^n + (n-1)x^{n-2} \right) \operatorname{arctg} x dx =$	1p	
$= \left(x^{n+1} + x^{n-1} \right) \operatorname{arctg} x \Big _0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n-1} (x^2 + 1)}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{x^n}{n} \Big _0^1 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$	4 p	

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

Proiectarea corectă a itemului de tip întrebare structurată:	
- succesiunea subîntrebărilor asigură creșterea treptată a gradului de dificultate	3p
- fiecare subîntrebare solicită un răspuns care nu depinde de răspunsul la subîntrebarea precedentă	3p
- subîntrebările sunt în concordanță cu stimulul utilizat	3p
- subîntrebările evaluează trei competențe specifice, dintre cele precizate în secvența dată, în corelație cu tema/ conținuturile corespunzătoare	9p
Notă. Punctajul se acordă și în situația în care una dintre subîntrebări evaluează două dintre competențele specifice	
- corectitudinea rezolvării sarcinilor de lucru ale itemului	6p
- corectitudinea științifică a informației matematice	6p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- Definirea conceptului de educație formală 4 puncte
- Definirea conceptului de educație nonformală 4 puncte
- Definirea conceptului de educație informală 4 puncte
- Analiza conceptului de educație formală 4 puncte
- Analiza conceptului de educație nonformală 4 puncte
- Analiza conceptului de educație informală 4 puncte
- Interdependența formelor educației 6 puncte