

Olimpiada de matematică
Etape locală - 16 februarie 2013

Clasa a IX-a - barem

1. a) Verificare prin inducție matematică 3p
 b) Pentru $n = 2$ obținem $a_2 = 2a_1$, iar pentru $n = 3$ obținem $a_3 = 3a_1$ 1p
 Prin inducție se demonstrează că $a_n = na_1$, deci șirurile căutate sunt de forma $a_n = na$ cu $a > 0$ 3p

2. a) Verificare 3p
 b) Dacă $xy + yz + zx \geq 0$ atunci

$$x^2 + y^2 + z^2 + t(xy + yz + zx) = (x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) + (t+1)(xy + yz + zx) \geq 0,$$
 oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $t \in [-1, 2]$. 2p
 Dacă $xy + yz + zx < 0$ atunci

$$x^2 + y^2 + z^2 + t(xy + yz + zx) = (x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) + (t-2)(xy + yz + zx) \geq 0,$$
 oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$ și oricare ar fi $t \in [-1, 2]$. 2p

3. a) Avem $\overrightarrow{G_A G_B} = \overrightarrow{MG_B} - \overrightarrow{MG_A} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}}{3} - \frac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3} = \frac{\overrightarrow{BA}}{3}$ și analoagele. Se obține concluzia. 4p
 b) Fie G și G' centrele de greutate ale triunghiurilor $\triangle ABC$ și respectiv $\triangle G_A G_B G_C$. Atunci avem

$$\overrightarrow{MG'} = \frac{\overrightarrow{MG_A} + \overrightarrow{MG_B} + \overrightarrow{MG_C}}{3} = \frac{2(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})}{9} = \frac{2}{9}\overrightarrow{MG}$$
 și apoi concluzia. 3p

4. a) Presupunem prin reducere la absurd că $x \neq y$. Fie $a > 0$, $a = |x - y|$. Axioma lui Arhimede asigură existența unui număr $m \in \mathbb{N}^*$ pentru care $ma > 1$, adică $|x - y| > \frac{1}{m}$. 3p
 b) Ipoteza conduce la $|x_n - y_n| \in [0, 1)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Echivalent cu $|x - y| < \frac{1}{a_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.
 Concluzia se obține asemănător cu punctul anterior. 4p

NOTĂ

- Orice soluție corectă se punctează corespunzător.

Olimpiada de matematică
Etapă locală - 16 februarie 2013

Clasa a X-a - barem

1. a) Se observă că $x = 0$ este soluție și pe baza monotoniei funcției radical se demonstrează că este unică. 3p
 b) Ipoteza conduce la concluzia $x > 0$. 1p
 Avem $\frac{x^2 + 1}{x} \geq 2$ și $2^{x(2-x)} \leq 2$ pentru orice $x > 0$, de unde $x = 1$. 3p

2. a) Se obține prin logaritmare 1p
 b) $\sum \frac{1}{x+1} = \sum \frac{1}{\log_{bc} a + 1} = \sum \frac{\lg b + \lg c}{\lg a + \lg b + \lg c} = 2$. 2p
 c) Avem $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{4}{x+y+2}$ și atunci $\sum \frac{1}{x+y+2} \leq \frac{1}{4} \sum \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \right) = 1$. 4p

3. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z = (a+b)^3 = (b+c)^3 = (c+a)^3$. Deoarece $a+b$, $a+c$ și $b+c$ sunt distincte, ele sunt rădăcinile de ordin trei ale numărului z . Dacă $w \in \mathbb{C}$ este una dintre ele atunci avem de exemplu $a+b = w$, și $a = -w\varepsilon^2$ și $b+c = w\varepsilon^2$, unde $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. 4p
 Obținem $a+b+c = 0$. Apoi $c = -w$, $b = -w\varepsilon$ și $a = -w\varepsilon^2$, de unde concluzia. 3p

4. a) Schimbăm pe x cu y și deducem $f(x+y) + f(x-y) = f(y+x) + f(y-x)$ și apoi alegem $y = 0$. 2p
 b) Din $x = y = 0$ obținem $f(0) = 2$. Pentru $y = 1$, avem $f(x+1) = \frac{5}{2}f(x) - f(x-1)$, iar prin inducție obținem $f(n) = 2^n + 2^{-n}$, pentru $n \in \mathbb{N}^*$. Folosind paritatea obținem $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, pentru orice $x \in \mathbb{Z}$. 4p
 Această funcție verifică ipotezele problemei. 1p

NOTĂ

- Orice soluție corectă se punctează corespunzător.

Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a XI-a - barem

1. a) Se obține $\Delta = (x+2y)(x-y)^2 \geq 0$ 4p
- b) Avem $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Delta(x,1)}{\ln(x^3-3x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x-1)^2}{\ln(x^3-3x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{\ln(x^3-3x+3)} = 1$ 3p
2. a) De exemplu $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ și $b_n = \frac{1}{n}$. Se demonstrează că îndeplinesc condițiile din enunț. 3p
- b) De exemplu $a_n = 1 - (-1)^n$ și $b_n = 1 + (-1)^n$. Se demonstrează că îndeplinesc condițiile din enunț. 4p
3. a) Din teorema Hamilton-Cayley, avem $X^2 = \text{Tr}(X)X - \det(X)I_2$, care verifică ipoteza pentru $n = 2$.
Apoi se aplică inducția matematică. 1p
2p
- b) Din ipoteză obținem $\text{Tr}(A) = 0$, iar din $AB = A(B + I_2)$ obținem $\det(A) = 0$. Teorema Hamilton-Cayley conduce la concluzia $A^2 = O_2$. 2p
- Folosind punctul anterior, avem $B^n = a_n B + b_n I_2$ și atunci $AB^n A = a_n ABA + b_n A^2 = a_n A(A + AB) = O_2$. 2p
4. a) Cazul $a = b$ este banal. Analizăm doar cazul $a < b$, celălalt fiind analog.
Din $a < b$, deducem $a < \sqrt{ab} < b$, de unde obținem $a_0 < a_1 < b_1 < b_0$. Prin inducție deducem că
 $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci șirurile $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ și $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sunt convergente. 2p
- Apoi avem $a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}$, de unde $|a_{n+1} - b_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_n - b_n|$. Obținem că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ și concluzia 2p
- b) Avem $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Apoi $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}}$, de unde $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2^n}}$, pentru orice
 $n \in \mathbb{N}^*$. Suntem conduși la $a_n = \frac{1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{2^n}} - 1}(b-a)$, care prin trecere la limită ne conduce la $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b-a}{\ln b - \ln a}$. 3p

NOTĂ

- Orice soluție corectă se punctează corespunzător.

Olimpiada de matematică
Etape locală - 16 februarie 2013

Clasa a XII-a - barem

1. a) Se verifică axiomele monoidului 2p
 b) Avem $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{2013 \text{ ori}} = (x - a)^{2013} + a$; 2p
 Se obține $x \in \{a - 1, a, a + 1\}$. 3p

2. a) $\int \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx = \frac{4}{5} \int \frac{2 \sin x + \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx + \frac{3}{5} \int \frac{2 \cos x - \sin x}{2 \sin x + \cos x} dx = \frac{4}{5} x + \frac{3}{5} \ln |2 \sin x + \cos x| + C$; 3p
 b) Se folosește schimbarea de variabilă $y = -x$. 4p

3. a) Verificare. 2p
 b) Verificare. 2p
 c) Dacă $a = \prod_{x \in H} x$ deducem din punctul b) că a este element de ordin 2, deci mulțimea din enunț coincide cu mulțimea $M = \{x \in G \mid x^2 = e\}$ și de aici concluzia. 3p

4. a) Dacă $f(x) \leq 1$, atunci $a_{n+1} - a_n = \int_0^1 f^n(x)(f(x) - 1)g(x)dx \leq 0$, deci șirul este descrescător și fiind pozitiv, este apoi convergent. 2p
 Dacă $f(x) > 1$ și f continuă, există $a \in [0, 1]$ astfel încât $\min f = f(a) > 1$. Atunci $a_n \geq f^n(a) \int_0^1 g(x)dx$, deci șirul nu poate fi convergent. 2p
 b) Din inegalitatea mediilor deducem că $f^{n+1}(x) + f^{n-1}(x) \geq 2f^n(x)$, deci $f^{n+1}(x) - f^n(x) \geq f^n(x) - f^{n-1}(x)$, de unde $a_{n+1} - a_n \geq a_n - a_{n-1}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dacă $a_{n+1} - a_n \leq 0$, atunci șirul este descrescător, deci are limită, iar dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $a_{k+1} - a_k > 0$, atunci $a_{n+1} - a_n > 0$ pentru orice $n > k$, deci șirul va fi crescător și din nou are limită. 3p

NOTĂ

- Orice soluție corectă se punctează corespunzător.