

Olimpiada de matematică
Etaa locală - 16 februarie 2013

Clasa a V-a

1. Se dau numerele:

$$x = \left[(2^7)^4 + 125^3 - 7^{25} : 7^{15} \right] : (5^9 - 49^5 + 4^{14}) \cdot 3^{26}$$

$$y = 2^{100} : \left[(6^{17} : 6^{16} - 4)^{97} + 2^{104} : (2^4 \cdot 2^3) + (2^2)^{49} \right] \cdot 2^{38}.$$

- a) Arătați că $x = 3^{26}$ și $y = 2^{39}$;
- b) Care dintre numerele x și y de mai sus este mai mare?
2. La un concurs de matematică, din 40 de elevi, 25 au rezolvat prima problemă, 30 a doua problemă, 35 a treia problemă, iar 33 a patra problemă. Arătați că cel puțin 3 elevi au rezolvat toate cele 4 probleme.
3. Determinați toate numerele naturale de forma \overline{abc} care împărțite la \overline{bc} dau câtul 4 și restul $\overline{bc} - 8$.
- Gazeta Matematică – nr.10/ 2012**
4. La un meci de fotbal, echipa câștigătoare primește 3 puncte, iar cea învinsă primește 0 puncte. Dacă meciul se termină egal, fiecare echipă primește câte 1 punct. Cu aceste reguli de punctaj se organizează un turneu la care participă patru echipe, fiecare echipă jucând câte două meciuri cu fiecare dintre celelalte trei. La final se realizează un clasament în funcție de punctajul acumulat de fiecare echipă.
- a) Determinați câte meciuri se joacă în total în acest turneu;
- b) Dacă suma tuturor punctelor acumulate de către cele 4 echipe este 34 puncte, determinați numărul de meciuri încheiate la egalitate.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Etapă locală - 16 februarie 2013

Clasa a VI-a

1. a) Efectuați: $\left[0, (6) + 3, (63) + 0, 2(37)\right] : \left(\frac{2}{3} + \frac{40}{11} + \frac{47}{198}\right)$.
b) Determinați valoarea numărului natural a știind că numărul $B = \frac{2}{a} + \frac{1}{3}$ este natural.
2. Aflați numerele naturale a și b știind că $[a, b]$ este de 15 ori mai mare decât (a, b) și $5a + 3b = 150$.
(S-a notat cu $[a, b]$ cel mai mic multiplu comun și cu (a, b) cel mai mare divizor comun al numerelor a și b .)
Gazeta Matematică – nr.10/2012
3. Fie unghiurile adiacente suplimentare AOB și BOC .
a) Dacă $m(\angle BOC)$ este cu 45° mai mare decât dublul măsurii unghiului AOB , aflați măsurile celor două unghiuri.
b) Dacă OE este bisectoarea unghiului AOB și $OD \perp OE$, D fiind în același semiplan cu E față de dreapta AC , demonstrați că OD este bisectoarea unghiului BOC .
4. Într-un punct R al unei drepte se găsește un robot care se deplasează pe această dreaptă la stânga sau la dreapta după cum dorește. El este programat ca la prima mutare să facă 2 pași, la a doua mutare să facă 4 pași, la a treia mutare să facă 6 pași și în general la a n -a mutare să facă $2n$ pași.
a) Descrieți o variantă de mișcare a robotului prin care să pornească din punctul R și să își încheie deplasarea tot în punctul R după exact 4 mutări.
b) Care este numărul minim de mutări care trebuie parcurs de robot astfel încât să pornească din punctul R , iar la finalul deplasării să ajungă din nou în R ?
c) Demonstrați că există o variantă de deplasare a robotului astfel încât să pornească din R și să ajungă după 179 de mutări tot în R .

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 2 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Etapa locală - 16 februarie 2013

Clasa a VII-a

1. a) Fie $a, b, c \in \mathbb{Q}^*$ direct proporționale cu 3, 4 și respectiv 5. Demonstrați că numărul $\frac{10a+b+4c}{a+b-c}$ este cub perfect.
b) Demonstrați că numărul $\sqrt{2012^{2013} + 2013^{2012}}$ este irațional.
2. Fie triunghiul $\triangle ABC$ în care $AB < AC$. Fie $D \in (AB)$, $B \in (AD)$ și $E \in (AC)$, $C \in (AE)$ astfel încât $[BD] \equiv [CE]$. Perpendicularele din B și D pe bisectoarea unghiului $\sphericalangle BAC$ intersectează dreapta AC în F și, respectiv G .
a) Demonstrați că triunghiul $\triangle ABF$ este isoscel;
b) Demonstrați că $[FG] \equiv [CE]$.
3. Fie numerele reale a, b, c, d, e astfel încât $|a-b| = |b-c| = |c-d| = |d-e| = |e-a|$. Demonstrați că $a = b = c = d = e$.
Gazeta Matematică – nr.10/ 2012
4. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu baza mare AB și $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^\circ$. Demonstrați inegalitățile:
a) $AB - CD > BC - AD$;
b) $AB + AC > DB + DC$.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică
Etape locală - 16 februarie 2013**Clasa a VIII-a**

1. Pe planul triunghiului dreptunghic ABC , cu $AB = AC = 4\sqrt{2}$ cm, în punctul A se ridică perpendiculara, pe care se consideră punctele E și F , astfel încât $AE = 4\sqrt{3}$ cm și $AF = 4\sqrt{15}$ cm. Arătați că aria triunghiului EBC este media geometrică a ariilor triunghiurilor ABC și FBC .

Supliment Gazeta Matematică – nr.9/2012

2. a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un pătrat perfect. Demonstrați că restul împărțirii sale la 4 este 0 sau 1.
b) Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCD A'B'C'D'$ în care lungimile muchiilor AB , AD și AA' sunt exprimate prin numere naturale impare. Demonstrați că lungimea diagonalei AC' este exprimată printr-un număr irațional.
3. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^2 + b^2 \leq 2ab$. Demonstrați că $a = b$.
b) Fie $x, y \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $9^{x-2} + 9^{y+2} \leq 2 \cdot 3^{x+y}$. Demonstrați că numărul $3^x + 3^y$ se divide cu 41.

Gazeta Matematică – nr.6-7-8/2012

4. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AB \perp CD$. Fie M mijlocul muchiei BC și N mijlocul muchiei BD . Pe semidreapta (DM) alegem punctul E astfel încât $DE = 2DM$, iar pe semidreapta (CN) alegem punctul F astfel încât $CF = 2CN$.
- a) Demonstrați că punctele F, B, E sunt coliniare;
b) Demonstrați că triunghiul $\triangle AEF$ este isoscel.

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.