

SUBIECTUL I**BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE**

a) $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz$ și

$$(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2yz - 2xz$$

.....1 punct

Finalizare

.....1 punct

b) $4024^2 + 4026^2 + 4028^2 = 4(2012^2 + 2013^2 + 2014^2)$

.....1 punct

Conform subpunctului **a)**

$$4(2012^2 + 2013^2 + 2014^2) = (2012 + 2013 + 2014)^2 + (2012 + 2013 - 2014)^2 +$$

$$+ (2012 - 2013 + 2014)^2 + (-2012 + 2013 + 2014)^2 = 6039^2 + 2011^2 + 2013^2 + 2015^2.$$

.....1 punct

c) $abc = 2^{2013} \cdot 3^{2013} \cdot 6^{-2013} = 1$

.....1 punct

Amplifică prima fracție cu c și obține

$$\frac{1}{ab + a + 1} + \frac{1}{bc + b + 1} + \frac{1}{ca + c + 1} = \frac{c}{abc + ac + c} + \frac{1}{bc + b + 1} + \frac{1}{ca + c + 1}$$

.....1 punct

Amplifică a doua fracție cu ac și obține

$$\frac{c}{1 + ac + c} + \frac{ac}{c + abc + ac} + \frac{1}{ca + c + 1} = \frac{ca + c + 1}{ca + c + 1} = 1$$

.....1 punct

SUBIECTUL al II-lea

a) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow$

.....1 punct

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

.....1 punct

b) $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \geq \frac{(x + y)^2}{a + b} \Leftrightarrow b(a + b)x^2 + a(a + b)y^2 \geq ab(x + y)^2 \Leftrightarrow$

.....1 punct

$$\Leftrightarrow (bx - ay)^2 \geq 0, \text{ cu egalitate pentru } bx = ay.$$

.....1 punct

c) Conform subpunctului **b)**, avem: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x + y)^2}{a + b} + \frac{z^2}{c}$

Tot, conform subpunctului **b)**: $\frac{(x + y)^2}{a + b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x + y + z)^2}{a + b + c}$

.....1 punct

Am obținut astfel inegalitatea: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x + y + z)^2}{a + b + c} \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \text{ și } \forall a, b, c \in \mathbb{R}_+$

și aplicând-o, obținem:

$$\frac{x^3}{y^2(x + 2z)} + \frac{y^3}{z^2(y + 2x)} + \frac{z^3}{x^2(z + 2y)} = \frac{x^4}{xy^2(x + 2z)} + \frac{y^4}{yz^2(y + 2x)} + \frac{z^4}{zx^2(z + 2y)} \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(xy + yz + zx)^2} \quad \text{..1 punct}$$

Conform rezultatului enunțat la subpunctul **a)**, $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + xz + yz} \geq 1, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+ \text{ și finalizăm:}$

$$\frac{x^3}{y^2(x + 2z)} + \frac{y^3}{z^2(y + 2x)} + \frac{z^3}{x^2(z + 2y)} \geq \left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + xz + yz} \right)^2 \geq 1, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}_+.$$

.....1 punct

SUBIECTUL al III-lea

a) $\frac{MA}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{AD}{\sqrt{6}} = k$, unde $k \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow MA = k\sqrt{2}; AB = k\sqrt{3}; AD = k\sqrt{6};$

Fie $AE \perp BD$, cu $E \in BD$. Din $MA \perp (ABC), AE \perp BD, AE, BD \subset (ABC) \Rightarrow ME \perp BD$ 1 punct

$$\left. \begin{array}{l} (MBD) \cap (ABC) = BD \\ ME \perp BD \text{ și } ME \subset (MBD) \\ AE \perp BD \text{ și } AE \subset (ABC) \end{array} \right\} \Rightarrow \sphericalangle[(MBD), (ABC)] = \sphericalangle(ME, AE) = \sphericalangle MEA. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\left. \begin{array}{l} \triangle MAE \text{ e dr. în } A \\ ME = AE = k\sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow m(\sphericalangle MEA) = 45^\circ. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

b) $M \in (MBC) \cap (MAD) \Rightarrow \exists g, a.i. (MBC) \cap (MAD) = g$, cu condiția $M \in g$;

$AD \parallel BC, AD \subset (MAD), BC \subset (MBC), (MBC) \cap (MAD) = g \Rightarrow g \parallel AD \parallel BC$ 1 punct

$g \parallel AD, AD \subset (ABC), g \not\subset (ABC) \Rightarrow g \parallel (ABC) \Rightarrow g \cap (ABC) = \emptyset \Rightarrow g \cap BD = \emptyset \Rightarrow$
 $\Rightarrow g \parallel BD$ sau g și BD sunt drepte necoplanare ; Dar $D \notin g, AD \parallel g \Rightarrow BD \parallel g$.

Deci g și BD sunt drepte necoplanare ;1 punct

c) $k = 4 \Rightarrow MA = 4\sqrt{2} \text{ cm}; AB = 4\sqrt{3} \text{ cm}; AD = 4\sqrt{6} \text{ cm} \Rightarrow AC = BD = 12 \text{ cm}$. Fie $AC \cap BD = \{O\}$.

În semispațiul opus determinat de (ABC) și M , prin C construim, $CT \parallel MA$, a.i. $[CT] \equiv [MA]$...1 punct

Se arată că $MATC$ este paralelogram cu $MT \cap AC = \{O\}$. Din $MO \subset (MBD)$ și $T \in MO \Rightarrow T \in (MBD)$.

Construim $CF \perp BD$, cu $F \in BD$, și cu teorema celor trei perpendiculare, $TF \perp BD$.

Construim $CG \perp TF$, cu $G \in TF$ și cu reciproca a II-a a teoremei celor trei perpendiculare,

$CG \perp (MBD) \Rightarrow d[C, (MBD)] = CG$.

$$CT = CF = 4\sqrt{2} \text{ cm}; TF = 8 \text{ cm și } CG = 4 \text{ cm}. \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

SUBIECTUL al IV-lea

a) $ABC'D'$ este paralelogram $\Rightarrow \exists O$ a.i. $AC' \cap BD' = \{O\}$, cu O mijlocul diagonalei $[BD']$ 1 punct

$BCD'A'$ este paralelogram $\Rightarrow A'C$ trece prin O , mijlocul diagonalei $[BD']$ 1 punct

b) Din $CB \perp (ABB'), AB' \subset (ABB') \Rightarrow CB \perp AB'$ 1 punct

Din $AB' \perp BC, AB' \perp CM$ și $BC \cap CM = \{C\} \Rightarrow AB' \perp (BCM)$

$AB' \perp (BCM)$ și $BM \subset (BCM) \Rightarrow AB' \perp BM \Leftrightarrow BM \perp AB'$ 1 punct

sau, direct:

Aplicând reciproca I a teoremei celor trei perpendiculare, din

$CB \perp (ABA'), CM \perp AB', BM, AB' \subset (ABB') \Rightarrow BM \perp AB'$

c) Analog, aplicând reciproca I a teoremei celor trei perpendiculare, obținem $DN \perp AD'$ și $C'P \perp B'D'$.

Fie $AB = a, BC = b, BB' = c$.

$$\text{Obținem } AB' = \sqrt{a^2 + c^2}, AD' = \sqrt{b^2 + c^2}, B'D' = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Cu teorema catetei, în $\triangle ABB'$, $AB^2 = AM \cdot AB' \Rightarrow AM = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}$ și1 punct

$$B'M = \frac{c^2}{\sqrt{a^2 + c^2}}, \text{ de unde } \frac{AM}{B'M} = \frac{a^2}{c^2} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$$

$$\text{Analog } \frac{B'P}{D'P} = \frac{b^2}{a^2} \text{ și } \frac{D'N}{AN} = \frac{c^2}{b^2}. \text{ În } \triangle AB'D' \text{ avem } \frac{AM}{B'M} \cdot \frac{B'P}{D'P} \cdot \frac{D'N}{AN} = 1. \text{ Conform reciprocei}$$

Teoremei lui Ceva, deducem că dreptele $AP, B'N$ și $D'M$ sunt concurente.1 punct