

SUBIECTUL I

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

- a) $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$ 1 punct
 $D_{2013} = \{1; 3; 11; 61; 3 \cdot 11; 3 \cdot 61; 11 \cdot 61; 3 \cdot 11 \cdot 61\}.$ 1 punct
 $P_{div} = 3^4 \cdot 11^4 \cdot 61^4 = (3^2 \cdot 11^2 \cdot 61^2)^2 \Rightarrow P_{div}$ este pătrat perfect1 punct
- b) $p:2$ și $p \nmid 2^2$ 1 punct
 $\left. \begin{array}{l} p:2 \\ p \nmid 2^2 \\ 2 \text{ e nr. prim} \end{array} \right\} \Rightarrow p$ nu este pătrat perfect.1 punct
- c) Fie $d_1, d_2, d_3, \dots, d_k$, toți divizorii naturali ai numărului natural p , astfel încât
 $1 = d_1 < d_2 < d_3 < \dots < d_k = p.$
 Atunci $d_1 = \frac{p}{d_k}; d_2 = \frac{p}{d_{k-1}}; d_3 = \frac{p}{d_{k-2}}; \dots; d_k = \frac{p}{d_1};$
 Înmulțind aceste relații, membru cu membru, obținem:
 $d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \dots \cdot d_k = \frac{p}{d_k} \cdot \frac{p}{d_{k-1}} \cdot \frac{p}{d_{k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{p}{d_1} \Rightarrow (d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \dots \cdot d_k)^2 = p^k.$ 1 punct
 Din $p:2; p:3; p \nmid 2^2; p \nmid 3^2 \Rightarrow p = 2 \cdot 3 \cdot p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot p_3^{e_3} \cdot \dots \cdot p_k^{e_k} \Rightarrow$
 $Card D_p = (1+1) \cdot (1+1) \cdot (e_1+1) \cdot (e_2+1) \cdot (e_3+1) \cdot \dots \cdot (e_k+1):4 \Rightarrow k:4 \Rightarrow k = 4t, \text{ cu } t \in \mathbb{N}^*.$
 $(d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \dots \cdot d_k)^2 = p^k = p^{4t} = (p^{2t})^2 \Rightarrow d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \dots \cdot d_k = (p^{2t})^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow d_1 \cdot d_2 \cdot d_3 \cdot \dots \cdot d_k$ este pătrat perfect.1 punct

SUBIECTUL al II-lea

- a) $[AC] \equiv [BD]$ 1 punct
 $[AM] \equiv [BM] \Rightarrow M$ este mijlocul segmentului $[AB]$ 1 punct
- b) $\triangle ADE \equiv \triangle BCF (C.C.) \Rightarrow \sphericalangle E \equiv \sphericalangle F$ 1 punct
 $\triangle DRE \equiv \triangle CSF (C.C.) \Rightarrow [RE] \equiv [SF]$ 1 punct
- c) $\sphericalangle RDE \equiv \sphericalangle SCF \quad \triangle RDM \equiv \triangle SCM \quad L.U.L \Rightarrow \sphericalangle DMR \equiv \sphericalangle CMS$ 1 punct
 $\left. \begin{array}{l} \sphericalangle DMR \equiv \sphericalangle CMS \\ C, M, D \text{ sunt coliniare} \\ CD \text{ separă punctele } R \text{ și } S \end{array} \right\} \Rightarrow R, M, S \text{ sunt coliniare.}$ 1 punct

SUBIECTUL al III-lea

- a) RC este mediatoarea segmentului $[EL] \Rightarrow d(R; E) = d(R; L)$ 1 punct
 $\triangle REL$ este isoscel de bază $[EL] \Rightarrow \sphericalangle REL \equiv \sphericalangle RLE.$ 1 punct
- b) IC este mediatoarea segmentului $[EL] \Rightarrow d(I; E) = d(I; L)$
 IM este mediatoarea segmentului $[VE] \Rightarrow d(I; E) = d(I; V)$ 1 punct
 $\left. \begin{array}{l} d(I; E) = d(I; L) \\ d(I; E) = d(I; V) \end{array} \right\} \Rightarrow d(I; V) = d(I; L) \Rightarrow IV = IL \Rightarrow [IV] \equiv [IL] \Rightarrow \triangle IVL$ este isoscel de bază $[VL].$ 1 punct
- c) $\sphericalangle IVM \equiv \sphericalangle ILC$ 1 punct
 $\triangle IVM \equiv \triangle ILC (I.U.) \Rightarrow [IM] \equiv [IL] \Rightarrow IM = IL \Rightarrow d(I; M) = d(I; C)$ 1 punct
 $\left. \begin{array}{l} d(I; M) = d(I; C) \\ d(E; M) = d(E; C) \end{array} \right\} \Rightarrow IE$ este mediatoarea segmentului $[MC].$ 1 punct

SUBIECTUL al IV-lea

a) De exemplu: $11 + 29 + 59$ 1 punct

$11 + 29 + 59 = 99 : 3 \Rightarrow 99$ nu este prim \Rightarrow mulțimea $\{11; 29; 49; 59\}$ nu are proprietatea (P)1 punct

Observație: Nu este singurul exemplu!

b) Un exemplu de mulțime cu proprietatea (P) , de forma $A = \{5; 7; a; b\}$ este $\{5; 7; 11; 25\}$1 punct

$5 + 7 + 11 = 23$, este prim;

$5 + 7 + 25 = 37$, este prim;

$5 + 11 + 25 = 41$, este prim;

$11 + 7 + 25 = 43$, este prim;

Deci $\{5; 7; 11; 25\}$ are proprietatea (P) 1 punct

c) Fie A o mulțime cu cel puțin 5 elemente. Împărțind elementele din A la 3, obținem un rest, r , cu $r \in \{0; 1; 2\}$. Aplicând principiul cutiei, există cel puțin 3 elemente care dau același rest la împărțirea cu 3 sau există 3 elemente care dau resturi diferite două câte două la împărțirea cu 3.1 punct

Dacă există 3 elemente care dau același rest la împărțirea cu 3, atunci suma lor este mai mare ca 3, este divizibilă cu 3, deci nu este număr prim.1 punct

Dacă există 3 elemente care dau resturi diferite două câte două la împărțirea cu 3, atunci suma lor este mai mare ca 3, este divizibilă cu 3, deci nu este număr prim.

În concluzie, nu există o mulțime X cu proprietatea (P) , astfel încât $\text{card } X \geq 5$1 punct