

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

16 februarie-2013

Clasa a IX-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1,	$\left[\frac{x-1}{2} \right] + \left[\frac{x+1}{2} \right] + \left[\frac{x+3}{2} \right] = \left[\frac{x+7}{3} \right] + \left[\frac{x+4}{3} \right] + \left[\frac{x+1}{3} \right] \Leftrightarrow$ $\left[\frac{x-1}{2} \right] = \left[\frac{x+1}{3} \right] \Rightarrow \left \frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} \right < 1 \Leftrightarrow x-5 < 6 \Leftrightarrow -6 < x-5 < 6 \Leftrightarrow$ $-1 < x < 11 \Leftrightarrow 0 < \frac{x+1}{3} < 4; \text{Notăm } \left[\frac{x+1}{3} \right] = k, k \in \{0, 1, 2, 3\}.$	2p
	$1. \ k = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{x-1}{2} < 1 \\ 0 \leq \frac{x+1}{3} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 3 \\ -1 \leq x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [1; 2)$	1p
	$2. \ k = 1 \Rightarrow \begin{cases} 1 \leq \frac{x-1}{2} < 2 \\ 1 \leq \frac{x+1}{3} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x < 5 \\ 2 \leq x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [3; 5);$	1p
	$3. \ k = 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq \frac{x-1}{2} < 3 \\ 2 \leq \frac{x+1}{3} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq x < 7 \\ 5 \leq x < 8 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [5; 7);$	1p
	$4. \ k = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq \frac{x-1}{2} < 4 \\ 3 \leq \frac{x+1}{3} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7 \leq x < 9 \\ 8 \leq x < 11 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [8; 9);$	1p
	$S = [1; 2) \cup [3; 7) \cup [8; 9)$	1p

2.	$(n+1) \cdot a_{n+1} = (n-1) \cdot a_n \Leftrightarrow a_n = n \cdot a_n - (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot (1)$ <p>Dăm valori de la 2 la n în recurență și se obține:</p> $a_2 = 2 \cdot a_2 - 3 \cdot a_3$ $a_3 = 3 \cdot a_3 - 4 \cdot a_4$ $a_4 = 4 \cdot a_4 - 5 \cdot a_5$ \vdots $a_n = n \cdot a_n - (n+1) \cdot a_{n+1}$ <p>Adunând aceste egalități, se obține:</p> $a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = 2 \cdot a_2 - (n+1) \cdot a_{n+1} \Rightarrow$ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = a_1 + 2 \cdot a_2 - (n+1) \cdot a_{n+1} < a_1 + 2 \cdot a_2 = \frac{1}{3} + \frac{10}{6} = 2.$ <p>Se demonstrează că $a_{n+1} \geq 0$ din recurență.</p>	<p>4p</p> <p>3p</p>
3.	$\underbrace{111\dots110}_{(n-1)\text{ cifre}} \underbrace{222\dots22}_n = \underbrace{111\dots11}_{(n-1)\text{ cifre}} \cdot 10^{n+1} + 2 \cdot \underbrace{111\dots11}_n = \frac{10^{n-1}-1}{9} \cdot 10^{n+1} + 2 \cdot \frac{10^n-1}{9} =$ $\frac{10^{2n}-8 \cdot 10^n-2}{9} = \frac{(10^n-4)^2-18}{9} = \left(\frac{10^n-4}{3}\right)^2 - 2.$ <p>Se demonstrează prin inducție matematică că $(10^n-4):3, (\forall) n \in \mathbb{N}$ sau se demonstrează prin calcul direct:</p> $10^n - 4 = \underbrace{100\dots0}_n - 4 = \underbrace{999\dots9}_{n-1} 6 = 3 \cdot \underbrace{333\dots3}_{n-1} 2.$ <p>Așadar, $\frac{10^n-4}{3} = \underbrace{333\dots3}_{n-1} 2 \in \mathbb{N}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$</p> $a = \left(\underbrace{333\dots32}_{n-1 \text{ ori}}\right)^2 - 2 + x \text{ este pătrat perfect dacă } x = 2.$	<p>4p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>

4.	<p>Notăm $\frac{MB}{MA} = x, \frac{NC}{NA} = y$.</p> <p>Din M, G, I coliniare $\Rightarrow x + y = 1$ (1)</p> <p>Din M, I, N coliniare $\Rightarrow 6 \cdot x + 3 \cdot y = 4$ (2)</p> <p>Rezolvând sistemul, se obține $\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$</p> <p>Demonstrarea condițiilor (1), (2): $\overrightarrow{GM} = \frac{1}{x+1} \cdot \overrightarrow{GB} + \frac{x}{x+1} \cdot \overrightarrow{GA}$.</p> <p>Din $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC}$, se obține $\overrightarrow{GM} = \frac{1-x}{1+x} \cdot \overrightarrow{GB} - \frac{x}{1+x} \cdot \overrightarrow{GC}$.</p> <p>$\overrightarrow{GN} = \frac{1}{y+1} \cdot \overrightarrow{GC} + \frac{y}{y+1} \cdot \overrightarrow{GA}$</p> <p>Analog, $\overrightarrow{GN} = \frac{1-y}{1+y} \cdot \overrightarrow{GC} - \frac{y}{1+y} \cdot \overrightarrow{GB}$.</p> <p>$\overrightarrow{GM}, \overrightarrow{GN}$ coliniari $\Rightarrow \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{y+1}{-y} = \frac{-x}{x+1} \cdot \frac{y+1}{1-y} \Leftrightarrow x + y = 1$.</p> <p>Analog, $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{x+1} \cdot \overrightarrow{IB} + \frac{x}{x+1} \cdot \overrightarrow{IA}$ și</p> <p>$4 \cdot \overrightarrow{IA} + 6 \cdot \overrightarrow{IB} + 3 \cdot \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \frac{2-3 \cdot x}{2 \cdot (x+1)} \cdot \overrightarrow{IB} - \frac{3 \cdot x}{4 \cdot (x+1)} \cdot \overrightarrow{IC}$.</p> <p>$\overrightarrow{IN} = \frac{-3 \cdot y}{2 \cdot (y+1)} \cdot \overrightarrow{IB} + \frac{4-3 \cdot y}{4 \cdot (y+1)} \cdot \overrightarrow{IC}$.</p> <p>$\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}$ coliniari $\Rightarrow \frac{2-3 \cdot x}{2 \cdot (x+1)} \cdot \frac{2 \cdot (y+1)}{-3 \cdot y} = -\frac{3 \cdot x}{4 \cdot (x+1)} \cdot \frac{4 \cdot (y+1)}{4-3 \cdot y} \Rightarrow$</p> <p>$6 \cdot x + 3 \cdot y = 4$.</p>	<p>1p</p> <p>3p</p> <p>3p</p>
----	---	-------------------------------