

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA a VIII– a

1. a) Fie a și b două numere naturale. Știind că mulțimea $(a,b) \cap \mathbb{N}$ conține un singur element arătați că $\sqrt{a \cdot b + 1}$ este un număr rațional.

b) Fie a , b și c trei numere naturale nenule. Știind că mulțimea $(a,b) \cap \mathbb{N}$ conține 5 elemente și că mulțimea $(c,b) \cap \mathbb{N}$ conține 3 elemente. Arătați că $\sqrt{a^b + a^c}$ este irațional.

prof. Zetea Bogdan

2. a) Dacă $x, y > 0$, să se arate că $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

b) Dacă $a, b, c > 0$, să se arate că:

$$\frac{1}{(a+b)^2 + (a+c)^2} + \frac{1}{(b+c)^2 + (b+a)^2} + \frac{1}{(c+a)^2 + (c+b)^2} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

GM. 11/2012

3. Fie $ABCD$ un romb cu $AB = 6 \text{ cm}$ și $m(\hat{A}) = 45^\circ$. În punctul O , centrul cercului circumscris triunghiului ABD , se ridică perpendiculara OM pe planul rombului, $OM = 4 \text{ cm}$. Aflați:

a) Distanța de la punctul O la planul (MBC) .

b) Cosinusul unghiului dintre planele (MBC) și (ABC) .

prof. Marinela Mihali

4. Fie $ABCA'B'C'$ o prisma triunghiulară regulată dreaptă, cu $AB = 4\sqrt{3} \text{ cm}$, $AA' = 12 \text{ cm}$ și P un punct pe CC' .

a) Determinați poziția punctului P pe CC' știind că aria triunghiului PAB este $12\sqrt{6} \text{ cm}^2$.

b) Determinați sinusul unghiului dintre AC și $C'M$ unde M este mijlocul lui AB .

prof. Zetea Bogdan

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.
Timp de lucru 3 ore.

Subiectele au fost propuse și selectate de:

prof. Marinela Mihali, Liceul Borșa.

prof. Bogdan Zetea, Școala Gimnazială „George Coșbuc”, Sighetu Marmăției

SUCCES!