

# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA a VI– a

## BAREM

**Problema 1.** a) Fie numerele  $x, y, z$  și  $t \in \mathbb{N}$  care îndeplinesc condiția :

$7x + 5y - 2z - 2t = 0$  . Să se arate că numărul  $n = (11x + 9y) \cdot (z + t - x)$  este divizibil cu 10.

*Soluție.* Din relația dată avem că :  $7x + 5y = 2(z + t) \Rightarrow (7x + 5y) : 2$

Dar  $4x + 4y = 4(x + y) : 2$ , și atunci adunând obținem  $(11x + 9y) : 2 \Rightarrow n : 2$ .....1p

Din nou  $2x + 5x + 5y - 2z - 2t = 0 \Rightarrow 5(x + y) = 2(z + t - x) \Rightarrow 2(z + t - x) : 5$ .....1p

Dar 2 și 5 sunt prime între ele și atunci  $(z + t - x) : 5 \Rightarrow n : 5$ .....1p

În concluzie, cum  $n : 2$  și  $n : 5 \Rightarrow n : 10$ .....1p

b) Să se arate că fracția :

$\frac{n^2 + 3}{2n^4 + 7n^2 + 4}$ , este ireductibilă, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$  .

*Soluție.* Arătăm că  $(n^2 + 3, 2n^4 + 7n^2 + 4) = 1$  . Fie  $d$  un divizor comun al celor două numere.

Atunci  $\begin{cases} d | n^2 + 3 \\ d | 2n^4 + 7n^2 + 4 \end{cases}$ .....1p

Înmulțim primul număr cu  $2n^2$  și avem că :  $\begin{cases} d | 2n^4 + 6n^2 \\ d | 2n^4 + 7n^2 + 4 \end{cases}$  și prin diferență avem că  $d | n^2 + 4$ .....1p

Din nou  $\begin{cases} d | n^2 + 4 \\ d | n^2 + 3 \end{cases}$  și prin diferență obținem că  $d | 1 \Rightarrow d = 1$  , de unde fracția este ireductibilă. ....1p

**Problema 2.** a) Punctul  $C$  este mijlocul segmentului  $(AB)$ ,  $D$  este mijlocul lui  $(BC)$ ,  $E$  este mijlocul lui  $(CD)$ , iar  $F$  este un punct situat pe semidreapta  $(EB$  astfel încât  $(EB) \equiv (BF)$ . Dacă  $EB = 3$  cm calculați  $AF$ .

*Soluție.* Se poate nota  $ED = x$  și avem succesiv că  $CD = BD = 2x$  și  $EB = BF = 3x$  . Cum  $EB = 3$  cm avem că  $x = 1$  cm.....1p

Dar  $AB = CB = 4x \Rightarrow AC = 4$  cm.....1p

Atunci  $AF = 4 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 2 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 11 \text{ cm}$ .....1p

b) Se consideră două unghiuri adiacente  $\angle AOB$  și  $\angle BOC$  de măsuri  $108^\circ$ , respectiv  $68^\circ$ . Semidreptele  $[OM, [ON, [OP$  sunt bisectoarele unghiurilor  $\angle AOB, \angle BOC$ , respectiv  $\angle MON$ . Pe semidreapta opusă lui  $[OP$  se consideră punctul  $D$ , iar în interiorul unghiului  $\angle AOD$  alegem punctul  $E$  astfel încât  $m(\angle EOD) = 10^\circ$ . Arătați că punctele  $B, O, E$  sunt coliniare.

Soluție.  $m(\angle AOC) = 176^\circ$  .....1p

$m(\angle AOP) = 98^\circ$  .....1p

$m(\angle BOP) = 10^\circ$  .....1p

Dar  $P, O, D$  sunt coliniare și  $\angle BOP \equiv \angle EOD \Rightarrow B, O, E$  coliniare. ....1p

**Problema 3.** Se consideră pe un cerc 100 de puncte, iar în fiecare punct se scrie la întâmplare câte un număr natural de la 1 la 100. Este posibil ca suma oricăror 4 numere scrise în 4 puncte consecutive de pe cerc să fie mai mică decât 203 ? Justificați răspunsul !

Soluție. Notăm cele 100 de numere naturale  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  eventual în altă ordine, corespunzătoare celor 100 de puncte de pe cerc.

Presupunem că suma oricăror 4 numere aflate în 4 puncte consecutive de pe cerc au suma mai mică decât 203.....1p

Atunci au loc relațiile :

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 202 \\ a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 202 \\ a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq 202 \\ \dots \\ a_{99} + a_{100} + a_1 + a_2 \leq 202 \\ a_{100} + a_1 + a_2 + a_3 \leq 202 \end{cases} \dots\dots\dots 1p$$

Adunând cele 100 de relații obținem că  
 $4(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}) \leq 20200 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} \leq 5050$ .....  
 .....1p

Dar suma  $1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$ .....1p

Atunci în cele 100 de relații trebuie să avem egalitate, fiecare fiind egală cu 202. ....1p

Cum  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \Rightarrow a_1 = a_5$ , ceea ce contrazice faptul că numerele sunt distincte. ....1p

În concluzie cerința problemei nu poate fi îndeplinită. ....1p