

Barem de corectare

Clasa a V-a

Problema 1

$$\overline{abc} = \overline{bc} \cdot 4 + \overline{bc} - 8 \quad (1p) \quad 100a + \overline{bc} = \overline{bc} \cdot 4 + \overline{bc} - 8 \quad (1p) \quad 25a = \overline{bc} - 2 \quad (1p) \quad a \in \{1, 2, 3\} \quad (1p)$$

$$a=1 \Rightarrow \overline{bc} = 27 \Rightarrow \overline{abc} = 127 \quad (1p) \quad a=2 \Rightarrow \overline{bc} = 52 \Rightarrow \overline{abc} = 252 \quad (1p) \quad a=3 \Rightarrow \overline{bc} = 77 \Rightarrow \overline{abc} = 377 \quad (1p)$$

Problema 2

$$a) \quad 2^{7n+8} = 2^{7n} \cdot 2^8 = 128^n \cdot 256 \quad (1p)$$

$$3^{4n+3} = 3^{4n} \cdot 3^3 = 81^n \cdot 27 \quad (1p)$$

$$5^{3n+3} = 5^{3n} \cdot 5^3 = 125^n \cdot 125 \quad (1p)$$

$$3^{4n+3} < 5^{3n+3} < 2^{7n+8} \quad (1p)$$

$$b) \quad 3^{671} = 3^5 \cdot 3^{666} = 243 \cdot 9^{333} \quad (1p) \quad 7^{335} = 7^2 \cdot 7^{333} = 49 \cdot 7^{333} \quad (1p) \quad 7^{335} < 3^{671} \quad (1p)$$

Problema 3

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2012} = (3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + 3^4(3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \dots + 3^{2008}(3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4) = \quad (1p)$$

$$120 + 120 \cdot 3^4 + \dots + 120 \cdot 3^{2008} = \quad (1p)$$

$$120(1 + 3^4 + \dots + 3^{2008}) \quad (1p)$$

Este suficient să aflăm ultima cifră a numărului $1 + 3^4 + \dots + 3^{2008} \quad (1p)$

Ultima cifră a numerelor $1, 3^4, \dots, 3^{2008}$ este 1 $(1p)$

Ultima cifră a numărului $1 + 3^4 + \dots + 3^{2008}$ se obține adunând 1 de 503 ori, adică este 3 $(1p)$

Ultimele două cifre ale numărului sunt 60 $(1p)$

Problema 4

$$A = n \cdot (1 + 4 + 7 + \dots + 58) \quad (2p) \quad A = n \cdot 590 \quad (2p) \quad A = n \cdot 2 \cdot 5 \cdot 59 \quad (2p) \quad n = 2 \cdot 5 \cdot 59 = 590 \quad (1p)$$

Clasa a VI-a

Problema 1

Numărul n mai poate fi scris: $n = 2013(2013 - 1) - 2012 = 2013 \cdot 2012 - 2012$

$$= 2012(2013 - 1) = 2012 \cdot 2012 = 2012^2 \dots\dots\dots 2p$$

$$\Rightarrow \frac{2^{2012} + 2^{2011}}{2^{2011} + 2^{2010}} = \frac{2^{2011}(2+1)}{2^{2010}(2+1)} = \frac{4 \cdot 2^{2011}}{4 \cdot 2^{2010}} = 3 \dots\dots\dots 2p$$

Din $\frac{7x}{4} = \frac{808}{5n \cdot \left(\frac{2^{2012} + 2^{2011}}{2^{2011} + 2^{2010}}\right)}$ deducem $\frac{7x}{2012 \cdot 4} = \frac{808}{15 \cdot 2012^2} \Leftrightarrow x = \frac{2012 \cdot 4 \cdot 808}{7 \cdot 15 \cdot 2012^2} \Rightarrow x = \frac{1}{105} \in \mathbb{Q} \dots\dots\dots 3p$

Problema 2

$100a + 10b + c$ se divide cu 17

$\Rightarrow 15a + 10b + c$ se divide cu 17 (1)

Dar $12a - 6b + c$ se divide cu 17

Se adună ultimele două relații și se obține că: $27a + 4b + 2c$ se divide cu 17 $\dots\dots\dots 2p$.

Deci $5a + 2b + c$ se divide cu 17 $\dots\dots\dots 1p$.

Scăzând ultima relație din relația (1) se obține $5a + 4b$ divizibil cu 17 $\dots\dots\dots 1p$

Deoarece a și b sunt cifre, $a \neq 0$, avem $5 \leq 5a + 4b \leq 81$, deci $5a + 4b \in \{17, 34, 51, 68\} \dots\dots\dots 1p$

Analizând cazurile posibile se obțin soluțiile: 136; 612; 748 $\dots\dots 2p$.

Problema 3

a) Dacă ordinea punctelor este A-B-C atunci $MC = 8$ cm $(2p)$

Dacă ordinea punctelor este C-A-B atunci $MC = 4$ cm $(2p)$

b) Se poate lua $a = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2015 + 2 \quad (2p)$

Justificare: $a - 2 + i$ este divizibil cu i , pentru i de la 2 la 2015 $(1p)$

Problema 4

Notăm $m(\angle BOC) = x \Rightarrow m(\angle AOB) = 3x$.

Notăm cu [OM bisectoarea unghiului AOB și [ON bisectoarea unghiului BOC

Avem 2 cazuri: Cazul 1. $[OB \in \text{Int}(\angle AOC)$.

a) $m(\angle MON) = m(\angle MOB) + m(\angle BON) = 2x$, de unde $x = 20^\circ \dots\dots\dots 2p$.

$\Rightarrow m(\angle AOB) = 60^\circ, m(\angle BOC) = 20^\circ, m(\angle AOC) = 80^\circ \dots\dots\dots 1p$.

b) $m(\angle AOB) = 120^\circ \dots\dots\dots 1p$.

Cazul 2. $[OC \in \text{Int}(\angle AOB)$.

a) $m(\angle MON) = m(\angle MOB) - m(\angle NOB) = x$, de unde $x = 40^\circ \dots\dots\dots 1p$.

$\Rightarrow m(\angle AOB) = 120^\circ, m(\angle BOC) = 40^\circ, m(\angle AOC) = 80^\circ \dots\dots\dots 1p$.

b) $m(\angle AOB) = 60^\circ \dots\dots\dots 1p$.