

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
etapa locală – 9 februarie 2013

CLASA A VIII-A

SUBIECTE

I. Rezolvați ecuațiile:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \left| \frac{10x}{5x+1} \right| + \left| \frac{5x+1}{10x} \right| + |5x-1| = 2, \quad x \in \mathbf{R} - \left\{ -\frac{1}{5}, 0 \right\} \\ \text{b)} \quad & x^3 - 4x + 4 = \frac{x^4}{4} \quad (\text{RMT 1/2013}) \end{aligned}$$

II. Demonstrați inegalitățile următoare pentru orice numere strict pozitive a, b, c:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2} \\ \text{b)} \quad & 3 \cdot \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq 4 \cdot \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)^2 \end{aligned}$$

III. Fie ABCD patru puncte necoplanare astfel încât BC este media aritmetică a lungimilor segmentelor AB și AC. Fie G centrul de greutate al triunghiului ABD, G' centrul de greutate al triunghiului ACD, iar I centrul cercului înscris în triunghiul ABC. Demonstrați că $(IGG') \parallel (BCD)$.

IV. Un paralelipiped dreptunghic ABCDA'B'C'D' are dimensiunile $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$ și diagonala $AC' = d$. Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & d = \sqrt{ab + ac + bc} \\ \text{b.} \quad & AC' \perp (A'DB) \\ \text{c.} \quad & \frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} + \frac{b^4+c^4}{b^2+c^2} + \frac{c^4+a^4}{c^2+a^2} = d^2 \end{aligned}$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii

Timp de lucru: trei ore

Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.