Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Craiova, 9 februarie 2013
Clasa a V-a

Problema 1.

a) Câţi multipli de 6 sunt mai mici sau egali cu 610?

b) Precizaţi care dintre aceştia sunt multipli de 96 şi determinaţi numărul lor.

***

Problema 2. Să se determine numerele $\overline{ab}$ astfel încât numărul $\overline{aaa}+37\cdot(a+b)$ să fie un pătrat perfect.

***

Problema 3.

a) Arătaţi că $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$.

b) Câte cifre are numărul $A = 2^{320} \cdot 5^{240}$?

G.M. nr. 4/2012

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Notăm cu $S(n)$ suma cifrelor lui n. Arătaţi că dacă $S(n) = S(2 \cdot n)$, atunci n se divide cu 9.

***

Notă:
Timp de lucru: 2 ore;
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.

SOLUŢII

- clasa a V-a -

Problema 1.

a) Câţi multipli de 6 sunt mai mici sau egali cu 610?

b) Precizaţi care dintre aceştia sunt multipli de 96 şi determinaţi numărul lor.

Soluţie. a) Un multiplu de 6 este de forma $6 \cdot t$, cu t număr natural. Din $0 \leq 6 \cdot t \leq 610$ rezultă $0 \leq t \leq 101$. În total, sunt 102 astfel de numere.
b) Un multiplu al lui 96 este de forma $96 \cdot k$, unde k este număr natural. Deoarece $96 = 6 \cdot 16$, orice multiplu de 96 este multiplu de 6. Deci, căutăm valorile lui k astfel încât $6 \cdot 0 \leq 6 \cdot 16k \leq 6 \cdot 101$. Din $0 \leq 16k \leq 101$, rezultă $0 \leq k \leq 6$. Astfel, se obţin 7 numere şi anume: $0, 96, 96 \cdot 2, \ldots, \ 96 \cdot 6$.

Problema 2. Să se determine numerele $\overline{ab}$ astfel încât numărul $\overline{aaa} + 37 \cdot (a+b)$ să fie un pătrat perfect.
Soluţie. Fie $n = \overline{aaa} + 37 \cdot (a+b)$. Avem $n = 111 \cdot a + 37 \cdot (a+b) = 37 \cdot (4 \cdot a + b)$. Dar cum n trebuie să fie pătrat perfect rezultă că $4 \cdot a + b = 37 \cdot k^2$, k număr natural nenul. Însă a şi b fiind cifre implică $4 \cdot a + b \leq 36 + 9$. Prin urmare $k = 1$ şi deci $4 \cdot a + b = 37$ de unde $(a, b) \in \{(9,1), (8,5), (7,9)\}$. Numerele căutate sunt $91, 85, 79$.

Problema 3.

a) Arătaţi că $10^{24} < 2^{80} < 10^{25}$.

b) Câte cifre are numărul $A = 2^{320} \cdot 5^{240}$?

G.M. nr. 4/2012

Soluţie. a) Deoarece $10^{24} = (10^3)^8 = 1000^8$ şi $2^{80} = (2^{10})^8 = 1024^8$, rezultă că $10^{24} < 2^{80}$. Pentru a obţine şi cealaltă inegalitate, cum $2^{80} = 2^{25} \cdot 2^{55}$ şi $10^{25} = 2^{25} \cdot 5^{25}$, rămâne să comparăm numerele 2^{55} cu 5^{25}. În final, din $2^{55} = (2^{11})^5 = 2048^5$ şi $(5^5)^5 = 3125^5$, rezultă $2^{80} < 10^{25}$.
b) $A = 2^{80} \cdot 10^{240}$. Folosind relaţia a), obţinem $10^{264} < A < 10^{265}$, deci A are 265 de cifre.

Problema 4. Fie n un număr natural nenul. Notăm cu $S(n)$ suma cifrelor lui n. Arătaţi că dacă $S(n) = S(2 \cdot n)$, atunci n se divide cu 9.
Soluţie. Avem $n = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0} = 10^k a_k + \ldots + 10a_1 + a_0 = M9 + (a_k + a_{k-1} + \ldots + a_1 + a_0) = M9 + S(n)$. Prin urmare rezultă că restul împărţirii lui n la 9 este egal cu restul împărţirii lui $S(n)$ la 9.
Analog avem $2n = M9 + S(2n)$. Deci restul împărţirii lui $2n$ la 9 este egal cu restul împărţirii lui $S(2n)$ la 9. Cum $S(n) = S(2n)$ rezultă că n şi $2n$ dau acelaşi rest la împărţirea cu 9, deci $n = 9c_1 + r, 2n = 9c_2 + r, \ 0 \leq r \leq 8$. Scăzând aceste două relaţii se obţine $n = M9$.

BAREM DE CORECTARE

CLASA a V - a

Problema 1.

oficiu 1p
a) Un multiplu de 6 este de forma $6 \cdot t$, t număr natural 1p
$0 \leq 6 \cdot t \leq 610 \Rightarrow 0 \leq t \leq 101$ 1p
Sunt 102 astfel de numere 1p
b) Un multiplu al lui 96 este de forma $96 \cdot k$, k număr natural 1p
$96 = 6 \cdot 16 \Rightarrow$ orice multiplu de 96 este multiplu de 6 .... 2p
$6 \cdot 0 \leq 6 \cdot 16k \leq 6 \cdot 101$ 1p
$0 \leq 16k \leq 101 \Rightarrow 0 \leq k \leq 6$ 1p
Sunt 7 astfel de numere şi anume: $0, 96, 96 \cdot 2, \ldots,\ 96 \cdot 6$ 1p
Total 10p

Problema 2.

oficiu 1p
Fie $n = \overline{aaa} + 37 \cdot (a+b)$
$n = 111 \cdot a + 37 \cdot (a+b) = 37 \cdot (4 \cdot a + b)$ 2p
n pătrat perfect $\Rightarrow 4 \cdot a + b = 37 \cdot k^2$, $k \neq 0$ 2p
$37 \cdot k^2 = 4 \cdot a + b \leq 4 \cdot 9 + 9 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow 4 \cdot a + b = 37$ 2p
$(a, b) \in \{(9,1), (8,5), (7,9)\}$ 2p
Numerele căutate sunt $91, 85, 79$ 1p
Total 10p

Problema 3.

oficiu 1p
a) $10^{24} = (10^3)^8 = 1000^8$, $2^{80} = (2^{10})^8 = 1024^8 \Rightarrow 10^{24} < 2^{80}$ 3p
$2^{80} = 2^{25} \cdot 2^{55}$, $10^{25} = 2^{25} \cdot 5^{25}$ 1p
comparăm numerele 2^{55} cu 5^{25} 1p
$2^{55} = (2^{11})^5 = 2048^5$, $(5^5)^5 = 3125^5 \Rightarrow 2^{80} < 10^{25}$ 1p
b) $A = 2^{80} \cdot 10^{240}$ 1p
Din relaţia a), $10^{264} < A < 10^{265}$ 1p
A are 265 de cifre 1p
Total 10p

Problema 4.

oficiu 1p
$n = M9 + S(n)$ 2p
restul împărţirii lui n la 9= restul împărţirii lui $S(n)$ la 9 .... 2p
$2n = M9 + S(2n)$ 1p
restul împărţirii lui $2n$ la 9= restul împărţirii lui $S(2n)$ la 9 .... 1p
$S(n) = S(2n) \Rightarrow n = 9c_1 + r,\ 2n = 9c_2 + r,\ 0 \leq r \leq 8$ 2p
n este multiplu de 9 .... 1p
Total 10p

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Craiova, 9 februarie 2013
Clasa a VI-a

Problema 1.
Să se determine toate numerele naturale a respectiv b, $a < b$, de două cifre, ştiind că $cmmdc(a, b)$ este un număr prim, de 20 de ori mai mic decât $cmmmc(a, b)$.

***

Problema 2.
Să se determine cele mai mici 100 numerele naturale consecutive a căror sumă să fie divizibilă cu 105.

***

Problema 3.
Spunem că o mulţime X de numere naturale nenule are proprietatea (P) dacă suma oricăror trei elemente din X este un număr prim.

a) Daţi un exemplu de mulţime cu proprietatea (P), de forma $A = \{5, 7, a, b\}$.

b) Arătaţi că nu există mulţimi X cu proprietatea (P) astfel încât $cardX \geq 5$.

GM 4/2012

Problema 4.
Pe dreapta d se iau punctele distincte A şi B, iar pe $AB \backslash [AB]$ se consideră 2013 puncte distincte. Să se arate că suma distanţelor de la punctul A la cele 2013 puncte este diferită de suma distanţelor de la punctul B la cele 2013 puncte.

***

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10;
Timp de lucru: 2 ore.

Etapa locală, Craiova, 9 februarie 2013

Clasa a VI-a

Problema 1.

Oficiu 1p

$p = (a, b) \Rightarrow a = pa_1, b = pb_1, (a_1, b_1) = 1, a_1 < b_1$ 1p

$a \cdot b = [a, b] \cdot (a, b), 20 \cdot (a, b) = [a, b] \Rightarrow 20p = \dfrac{pa_1 \cdot pb_1}{p} \Rightarrow a_1 b_1 = 20$ 2p

$a_1 b_1 = 20, (a_1, b_1) = 1, a_1 < b_1 \Rightarrow a_1 = 1, b_1 = 20$ sau $a_1 = 4, b_1 = 5$ 2p

I. $a_1 = 1$, $b_1 = 20$ nu convine 1p

II. $a_1 = 4$, $b_1 = 5$

$(a, b) = p$ prim, a, b de două cifre $\Rightarrow 2 \leq p < 20 \Rightarrow p \in \{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ 1.5p

Soluţia: $a = 12, b = 15$; $a = 20, b = 25$; $a = 28, b = 35$; $a = 44, b = 55$; $a = 52, b = 65$;
$a = 68, b = 85$; $a = 76, b = 95$ 1.5p

Total **10p**

Problema 2.

Oficiu 1p

Fie $n, n+1, ..., n+99$ cele 100 de numere consecutive, $n \in \mathbb{N}$ 1p

$S = n + (n+1) + ... + (n+99) = 50(2n+99)$ 3p

$105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \mid S \Rightarrow 21 = 3 \cdot 7 \mid (2n+99)$ 1p

$2n + 99 \geq 99$ şi condiţia de minim din ipoteza problemei $\Rightarrow 2n + 99 = 105$ 2p

$n = 3 \Rightarrow$ numerele căutate sunt: 3,4,5,...100,101,102 .... 2p

Total **10p**

Problema 3.

Oficiu 1p

a). $A = \{5, 7, 11, 25\}$ 1.5p

b). Fie X o mulţime cu cel puţin 5 elemente

Elementele lui X împărţite la 3 dau resturile $0, 1, 2$ 1p

I. Trei elemente din X dau acelaşi rest 1p

Suma acestor trei elemente este divizibilă cu 3 şi mai mare decât 3 .... 1p

$\Rightarrow$ Suma celor trei elemente nu este număr prim $\Rightarrow X$ nu are proprietatea (P) 0.5p

II. Cel mult două elemente din X dau acelaşi rest 1p

$\Rightarrow$ există trei elemente ce dau resturile $0, 1, 2$ la împărţirea cu 3 .... 1p

Suma acestor trei elemente este divizibilă cu 3 şi mai mare decât 3 .... 1p

$\Rightarrow$ Suma celor trei elemente nu este număr prim $\Rightarrow X$ nu are proprietatea (P) 0.5p

Nu există X cu proprietatea (P) astfel încât $cardX \geq 5$ 0.5p

Total **10p**

Problema 4.

Oficiu 1p

Fie S_1, S_2 suma distanţelor de la punctul A, respectiv B, la cele 2013 puncte

a). Toate punctele sunt la stânga lui A $\Rightarrow S_1 < S_2$ 2p

b). Toate punctele sunt la dreapta lui B $\Rightarrow S_1 > S_2$ 2p

c). $M_1, \ldots, M_i (1 \leq i \leq 2012)$ la stânga lui A şi $M_{i+1}, \ldots, M_{2013}$ la dreapta lui B

$S_1 = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_i + BM_{i+1} + BM_{i+2} + \cdots + BM_{2013} + (2013 - i)AB$ 1.5p

$S_2 = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_i + BM_{i+1} + BM_{i+2} + \cdots + BM_{2013} + i \cdot AB$ 1.5p

Dacă $S_1 = S_2 \Rightarrow (2013 - i)AB = i \cdot AB$ 1p

$i = \dfrac{2013}{2}$ imposibil $\Rightarrow S_1 \neq S_2$ 1p

Total **10p**

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Craiova, 9 februarie 2013
Clasa a VI-a

Problema 1.

Să se determine toate numerele naturale a respectiv b, $a < b$, de două cifre, ştiind că $cmmdc(a,b)$ este un număr prim, de 20 de ori mai mic decât $cmmmc(a,b)$.

***

Soluţie. Fie $p = (a,b)$, număr prim. Atunci $a = pa_1$, $b = pb_1$ cu $(a_1,b_1) = 1, a_1 < b_1$(pentru că $a < b$ din ipoteză. Din relaţia $a \cdot b = [a,b] \cdot (a,b)$ şi din enunţul problemei avem: $20(a,b) = [a,b]$, adică $20p = \frac{pa_1 \cdot pb_1}{p}$, de unde $a_1b_1 = 20$. Cum $(a_1,b_1) = 1, a_1 < b_1 \Rightarrow a_1 = 1$, $b_1 = 20$ sau $a_1 = 4$, $b_1 = 5$.

I. Cazul $a_1 = 1$, $b_1 = 20$ nu convine.

II. Cazul $a_1 = 4$, $b_1 = 5$. Din $(a,b) = p$ prim $\Rightarrow p \geq 2$. Dar a şi b sunt numere de două cifre $\Rightarrow p < 20$, adică $p \in \{3,5,7,11,13,17,19\}$. Avem soluţiile:

$a = 12$, $b = 15$; $a = 20$, $b = 25$; $a = 28$, $b = 35$; $a = 44$, $b = 55$; $a = 52$, $b = 65$; $a = 68$, $b = 85$; $a = 76$, $b = 95$.

Problema 2.

Să se determine cele mai mici 100 numerele naturale consecutive a căror sumă să fie divizibilă cu 105.

***

Soluţie. Fie $n, n+1, ..., n+99$ cele 100 de numere consecutive, $n \in \mathbb{N}$. Atunci suma lor este $S = n+(n+1)+...+(n+99) = 100n + \frac{99(99+1)}{2} = 100n + 50 \cdot 99 = 50(2n+99)$. Din $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \mid S$ rezultă că $21 = 3 \cdot 7 \mid (2n+99)$, unde $2n+99 \geq 99$. Condiţia de minim din ipoteza problemei ne conduce la concluzia că $2n+99 = 105$, de unde $n = 3$. Deci numerele căutate sunt: 3,4,5,...100,101,102.

Problema 3.

Spunem că o mulţime X de numere naturale nenule are proprietatea (P) dacă suma oricăror trei elemente din X este un număr prim.

a) Daţi un exemplu de mulţime cu proprietatea (P), de forma $A = \{5,7,a,b\}$.

b) Arătaţi că nu există mulţimi X cu proprietatea (P) astfel încât $card X \geq 5$.

GM 4/2012

Soluţie.

a). Un exemplu de mulţime cu proprietatea din enunţ este $A = \{5,7,11,25\}$.

b). Fie X o mulţime cu cel puţin 5 elemente cu proprietatea din enunţ. Elementele lui X împărţite la 3 dau resturile $0,1,2$.

I. Dacă trei elemente din X dau acelaşi rest la împărţirea la 3, atunci suma acestor trei elemente este divizibilă cu 3 şi mai mare decât 3. Deci suma nu este număr prim, şi astfel X nu are proprietatea (P).

II. Dacă cel mult două elemente din X dau acelaşi rest la împărţirea la 3, atunci avem trei elemente care dau resturile $0,1,2$ la împărţirea cu 3. Suma acestor trei elemente este divizibilă cu 3 şi mai mare decât 3, deci nu este număr prim, şi astfel X nu are proprietatea (P). Nu există astfel mulţimi X cu proprietatea (P) astfel încât $cardX \geq 5$.

Problema 4.
Pe dreapta d se iau punctele distincte A şi B, iar pe $AB \setminus [AB]$ se consideră 2013 puncte distincte. Să se arate că suma distanţelor de la punctul A la cele 2013 puncte este diferită de suma distanţelor de la punctul B la cele 2013 puncte.

***

Soluţie. Fie S_1,S_2 suma distanţelor de la punctul A respectiv B la cele 2013 puncte.

a). Toate punctele sunt la stânga lui A. Atunci $S_1 = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_{2013}$ iar $S_2 = BM_1 + BM_2 + \cdots + BM_{2013} = (BA + AM_1) + \cdots + (BA + AM_{2013}) = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_{2013} + 2013 \cdot AB$. Observăm că $S_1 < S_2$.

b). Toate punctele sunt la dreapta lui B. Atunci $S_1 = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_{2013} = (AB + BM_1) + (AB + BM_2) + \cdots + (AB + BM_{2013}) = 2013AB + BM_1 + BM_2 + \cdots + BM_{2013}$ iar $S_2 = BM_1 + BM_2 + \cdots + BM_{2013}$. Observăm că $S_1 > S_2$.

c). Considerăm că $M_1, \ldots, M_i$ $(1 \leq i \leq 2012)$ sunt la stânga lui A şi $M_{i+1}, \ldots, M_{2013}$ sunt la dreapta lui B.

Atunci $S_1 = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_{2013} = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_i + (AB + BM_{i+1}) + (AB + BM_{i+2}) + \cdots + (AB + BM_{2013}) = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_i + BM_{i+1} + BM_{i+2} + \cdots + BM_{2013} + (2013 - i)AB$ şi

$S_2 = BM_1 + BM_2 + \cdots + BM_{2013} = (BA + AM_1) + \cdots + (BA + AM_i) + BM_{i+1} + BM_{i+2} + \cdots + BM_{2013} = AM_1 + AM_2 + \cdots + AM_i + BM_{i+1} + BM_{i+2} + \cdots + BM_{2013} + i \cdot AB$.

Dacă $S_1 = S_2 \Rightarrow (2013 - i)AB = i \cdot AB$, adică $i = \frac{2013}{2}$ imposibil, deci $S_1 \neq S_2$.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VII-a
Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1. Determinaţi $a \in Q$ astfel încât

$$a\sqrt{2012 - 2\sqrt{2011}} + \sqrt{2015 - 4\sqrt{2011}} \in Q.$$

(Gazeta Matematică)

Problema 2. Aflaţi numerele reale x, pentru care $|x-1| + |2-x| + |x-3| + |4-x| + ... + |2012-x| + |x-2013| = 2014(x-2014)$.

(Gazeta Matematică)

Problema 3. Fie $ABCD$ un patrulater convex în care triunghiurile ABC, ACD şi BDC au arii egale. Să se arate că $ABCD$ este paralelogram.

Dacă triunghiurile ABC şi BDC au şi perimetre egale, atunci $ABCD$ este dreptunghi.

***

Problema 4. Se consideră un punct M în planul paralelogramului $ABCD$. Fie N simetricul lui M faţă de A, P simetricul lui N faţă de B şi Q simetricul lui P faţă de C.

a) Să se arate că dreapta MQ trece prin punctul D şi că D este mijlocul segmentului $[MQ]$;

b) Unde trebuie să se afle punctul M pentru ca $MNQP$ să fie trapez ?

(Gh. Ţiţeica, Culegere de probleme)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10;
Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VII-a
Craiova, 9 februarie 2013
Soluţii

Problema 1. $\sqrt{2012-2\sqrt{2011}}=\sqrt{2011}-1$, $\sqrt{2015-4\sqrt{2011}}=\sqrt{2011}-2$,

Determinăm $a\in Q$ astfel încât $a(\sqrt{2011}-1)+\sqrt{2011}-2\in Q \Leftrightarrow \sqrt{2011}(a+1)-a-2\in Q$.

Deoarece 2011 este numar prim $\Rightarrow \sqrt{2011}\in R\backslash Q$

Deducem $a=-1$.

Problema 2.

Deoarece $|x-1|, |2-x|, |x-3|, |4-x|, ..., |2012-x|, |x-2013|\geq 0$ $\Rightarrow |x-1|+|2-x|+|x-3|+|4-x|+...+|2012-x|+|x-2013|\geq 0 \Rightarrow 2014(x-2014)\geq 0\Rightarrow x\geq 2014$.

Deducem că $|x-1|=x-1, |2-x|=x-2, |x-3|=x-3, |4-x|=x-4, ..., |2012-x|=x-2012, |x-2013|=x-2013$.

Ecuaţia dată devine $2013x-2013\cdot 1007=2014x-2014^2\Rightarrow x=1007\cdot 2015$.

Problema 3. $A_{ABC}=\frac{d(A,BC)\cdot BC}{2}, A_{BDC}=\frac{d(D,BC)\cdot BC}{2}$. Deoarece $A_{ABC}=A_{BDC}\Rightarrow d(A,BC)=d(D,BC)\Rightarrow AD \parallel BC$ (deoarece A, D apartin aceluiasi semiplan determinat de BC);

$A_{ACD}=\frac{d(A,CD)\cdot CD}{2}, A_{BDC}=\frac{d(B,CD)\cdot CD}{2}$. Deoarece $A_{ACD}=A_{BDC}\Rightarrow d(A,DC)=d(B,DC)\Rightarrow AB\parallel CD$ (deoarece A, B apartin aceluiasi semiplan determinat de DC);

Deducem că $ABCD$ este paralelogram.

Dacă în plus, $P_{ABC}=P_{BDC}\Rightarrow AB+BC+CA=DB+BC+CD\Rightarrow CA=DB$ (deoarece din $ABCD$ este paralelogram $\Rightarrow AB=CD$).

Deducem că $ABCD$ este dreptunghi.

Problema 4. a) Deducem că $NQ=2BC$ şi $NQ\parallel BC$;

Deoarece $ABCD$ paralelogram $\Rightarrow NQ=2AD$ şi $NQ\parallel AD$.

Cum A este mijocul lui $MN\Rightarrow D$ este mijlocul segmentului MQ.

b) MP şi NQ nu pot fi paralele între ele.

Pentru ca $MN\parallel PQ$, M se va afla pe dreapta AC', unde C' este simetricul lui C faţă de B.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a VII-a
Craiova, 9 februarie 2013
Barem de corectare

Problema 1.

Oficiu ________ 1p

$\sqrt{2012-2\sqrt{2011}}=\sqrt{2011}-1$ ________ 2p

$\sqrt{2015-4\sqrt{2011}}=\sqrt{2011}-2$ ________ 2p

$\sqrt{2011}(a+1)-a-2\in Q$ ________ 2p

2011 nr prim $\Rightarrow \sqrt{2011}\in R\backslash Q$ ________ 1.5p

$a=-1$ ________ 1.5p

Total ________ 10p

Problema 2.

Oficiu ________ 1p

$|x-1|, |2-x|, |x-3|, |4-x|, ..., |2012-x|, |x-2013| \geq 0 \Rightarrow$ ________ 1p

$|x-1|+|2-x|+|x-3|+|4-x|+...+|2012-x|+|x-2013|\geq 0$ ________ 1p

$\Rightarrow 2014(x-2014)\geq 0 \Rightarrow x\geq 2014$ ________ 1p

$|x-1|=x-1, |2-x|=x-2, |x-3|=x-3, |4-x|=x-4, ..., |2012-x| = x-2012, |x-2013|=x-2013$ ________ 2p

Ecuaţia dată devine $2013x-2013\cdot 1007=2014x-2014^2$ ________ 3p

$\Rightarrow x=1007\cdot 2015$ ________ 1p

Total ________ 10p

Problema 3.

Oficiu ________ 1p

$A_{ABC}=\frac{d(A,BC)\cdot BC}{2}, A_{BDC}=\frac{d(D,BC)\cdot BC}{2}$. Deoarece $A_{ABC}=A_{BDC}\Rightarrow d(A,BC)=d(D,BC)\Rightarrow AD \parallel BC$ ________ 2p

$A_{ACD}=\frac{d(A,CD)\cdot CD}{2}, A_{BDC}=\frac{d(B,CD)\cdot CD}{2}$. Deoarece $A_{ACD}=A_{BDC}\Rightarrow d(A,DC)=d(B,DC)\Rightarrow AB\parallel CD$ ________ 2p

$AD\parallel BC, AB\parallel CD\Rightarrow ABCD$ este paralelogram ________ 1p

$P_{ABC}=P_{BDC}\Rightarrow AB+BC+CA=DB+BC+CD$ ________ 2p

$\Rightarrow CA=DB\Rightarrow ABCD$ este dreptunghi ________ 2p

Total ________ 10p

Problema 4.

Oficiu ________ 1p

a) $NQ=2BC$ şi $NQ\parallel BC$; ________ 1p

$ABCD$ paralelogram $\Rightarrow NQ=2AD$ şi $NQ\parallel AD$. ________ 1p

A este mijlocul lui $MN\Rightarrow D$ este mijlocul segmentului MQ. ________ 2p

b) MP şi NQ nu pot fi paralele între ele ________ 2p

Pentru ca $MN\parallel PQ$, M se va afla pe dreapta AC', unde C' este simetricul lui C faţă de B. ________ 3p

Total ________ 10p

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Olimpiada de matematică-Etapa locală
Craiova, 9 februarie 2013
Clasa a VIII-a

Problema 1. Determinaţi numărul natural $\overline{xy}$ pentru care:

$$\frac{1}{\sqrt{\overline{xy}}-1}=\overline{0,xy},$$

în sistemul zecimal.

GM 6/2010

Problema 2. Fie $SABCD$ o piramidă patrulateră regulată, $AM\perp SB$, $M\in SB$, $BN\perp SC$, $N\in SC$, $CP\perp SD$, $P\in SD$, $DQ\perp SA$, $Q\in SA$ şi R simetricul lui N faţă de AC.

a) Demonstraţi că punctele B, R, Q, D sunt coplanare.

b) Aflaţi măsura unghiului dintre dreptele MP şi RQ.

GM 5/2012

Problema 3. Arătaţi că dacă

$$3a^2+3b^2-2a-14b+\frac{46}{3}=0,$$

unde a, $b\in\mathbb{R}$, atunci

$$\frac{4}{3}\leq a+b\leq 4.$$

***

Problema 4. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare astfel încât triunghiul BCD să fie echilateral iar $m\left(\widehat{ABC}\right)=m\left(\widehat{ABD}\right)=45^\circ$. Demonstraţi că planele (ABC) şi (ABD) sunt perpendiculare.

***

Notă:
1. Timp de lucru: 3 ore
2. Toate subiectele sunt obligatorii
3. Fiecare problemă se va nota cu puncte de la 1 la 10 (un punct din oficiu)

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Olimpiada de matematică-Etapa locală
Craiova, 9 februarie 2013
Clasa a VIII-a
Soluţii

Problema 1. Egalitatea din enunţ se scrie $\dfrac{1}{\sqrt{10x+y}-1}=\dfrac{10x+y}{100}$. Notând $z=\sqrt{10x+y}$, rezultă $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{z^2}{100}$. Cum $z^3-z^2-100=(z^3-125)-(z^2-25)=(z-5)(z^2+4z+20)$ şi $z^2+4z+20>0$ pentru orice z număr real, deducem că $z=5$. Atunci $\sqrt{10x+y}=5$ de unde $10x+y=25$. Aşadar $\overline{xy}=25$.

Problema 2.
a) Fie $O=AC\cap BD$. Deoarece piramida $SABCD$ este regulată $\triangle SAC$ este isoscel, deci $\widehat{QAO}\equiv\widehat{NCO}$. Cum $ABCD$ este pătrat, vom avea $[AO]\equiv[OC]$. Pe de altă parte, cum $\triangle SBC\equiv\triangle SDA$, vom avea $[BC]\equiv[DA]$, $\widehat{BCN}\equiv\widehat{DAQ}$, $\widehat{CNB}\equiv\widehat{DQA}=90°$, deci $\triangle BCN\equiv\triangle DAQ$. De aici obţinem că $[NC]\equiv[AQ]$, şi prin urmare $\triangle AQO\equiv\triangle CNO$. De aici rezultă $\widehat{QOA}\equiv\widehat{NOC}$. Se observă că $(SAC)\perp(ABCD)$ şi fie $F\in AC$, $NF\perp AC$, $R\in NF$. Avem $[NF]\equiv[FR]$ şi $OF\perp NR$, deci $\triangle NOR$ este isoscel şi $\widehat{NOC}\equiv\widehat{ROC}$ deci $\widehat{QOA}\equiv\widehat{ROC}$. Cum $R\in NF\subset(SAC)$, va rezulta Q, O, R coliniare, deci $\{O\}=QR\cap DB$, în consecinţă B, R, Q, D sunt coplanare.

b) Analog ca mai sus se arată că $[MB]\equiv[PD]$, deci $[SP]\equiv[SM]$. Din reciproca teoremei lui Thales rezultă că $PM\parallel DB$. Dar $ABCD$ pătrat, deci $DO\perp AC$. De asemenea $SO\perp DO$, deci $DO\perp(SAC)$. Cum $QR\subset(SAC)$, vom avea $QR\perp DO$, deci $DB\perp QR$. Atunci $PM\perp QR$ şi $m\left(\widehat{MP,RQ}\right)=90°$.

Problema 3. Din enunţ deducem că $9a^2-6a+9b^2-42b+46=0$. Prin urmare $(3a-1)^2+(3b-7)^2=4$. De aici obţinem $(3a-1)^2\leq 4$ şi $(3b-7)^2\leq 4$. Aşadar, $-2\leq 3a-1\leq 2$ şi $-2\leq 3b-7\leq 2$. Adunând ultimele două relaţii rezultă $-4\leq 3a+3b-8\leq 4$, de unde $4\leq 3a+3b\leq 12$, care prin împărţire la 3 devine $\frac{4}{3}\leq a+b\leq 4$.

Problema 4.
Fie $E\in BA$, $CE\perp BA$. Avem $[BC]\equiv[BD]$, $\widehat{CBE}\equiv\widehat{DBE}$ iar latura BE este comună, deci $\triangle CBE\equiv\triangle DBE$. In consecinţă $m\left(\widehat{BED}\right)=m\left(\widehat{BEC}\right)=90°$, deci $BE\perp ED$. In $\triangle BEC$ avem $m\left(\widehat{BEC}\right)=90°$ şi $m\left(\widehat{EBC}\right)=45°$, deci triunghiul este isoscel şi $[BE]\equiv[EC]$. Analog $[BE]\equiv[ED]$. In $\triangle BEC$ şi $\triangle CED$ avem $[BE]\equiv[EC]$, $[EC]\equiv[ED]$ şi $[BC]\equiv[CD]$. In concluzie $\triangle BEC\equiv\triangle CED$, deci $m\left(\widehat{CED}\right)=m\left(\widehat{BEC}\right)=90°$. Aşadar $CE\perp ED$ şi $CE\perp BA$, prin urmare $CE\perp(BAD)$. De aici rezultă $(ABC)\perp(ABD)$.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Olimpiada de matematică-Etapa locală
Craiova, 9 februarie 2013
Clasa a VIII-a
Barem

Problema 1.

Oficiu 1p

$\dfrac{1}{\sqrt{10x+y}-1} = \dfrac{10x+y}{100}$ 1p

$z = \sqrt{10x+y}$, $\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{z^2}{100}$ 1p

$z^3 - z^2 - 100 = (z^3 - 5^3) - (z^2 - 5^2) = (z-5)(z^2+4z+20)$ 2p

$z^2 + 4z + 20 > 0$ pentru orice z număr real 2p

$\sqrt{10x+y} = 5$ 1p

$10x + y = 25$ 1p

$\overline{xy} = 25$. 1p

Problema 2.

Oficiu 1p

$\{O\} = AC \cap BD$, $\triangle AQO \equiv \triangle CNO$ 1p

$\widehat{QOA} \equiv \widehat{ROC}$ şi Q, O, A, R, C coplanare, deci Q, O, R coliniare 2p

$\{O\} = QR \cap DB$; punctele B, R, Q, D sunt coplanare 2p

$PM \parallel DB$ 1p

$DB \perp QR$, deci $PM \perp QR$ 2p

$m\left(\widehat{MP, RQ}\right) = 90°$ 1p

Problema 3.

Oficiu 1p

$9a^2 - 6a + 9b^2 - 42b + 46 = 0$ 1p

$(3a-1)^2 + (3b-7)^2 = 4$ 2p

$(3a-1)^2 \le 4$ şi $(3b-7)^2 \le 4$ 2p

$-2 \le 3a - 1 \le 2$ şi $-2 \le 3b - 7 \le 2$ 1,50p

$-4 \le 3a + 3b - 8 \le 4$ 1,50p

$4 \le 3(a+b) \le 12$; se împarte la 3 .... 1p

Problema 4.

Oficiu 1p

$E \in BA$, $CE \perp BA$, $BE \perp ED$ 1p

$[BE] \equiv [EC] \equiv [ED]$ 2p

$\triangle BEC \equiv \triangle CED$ 2p

$m\left(\widehat{CED}\right) = m\left(\widehat{BEC}\right) = 90°$ 2p

$CE \perp (BAD)$ 1p

$(ABC) \perp (ABD)$ 1p

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală, 9 Februarie 2013

Clasa a IX-a

Soluţii şi Barem de notare

Problema 1. Se observă că pentru $x = 0$ condiţia este verificată................................1 p

Dacă $x \in (0,1)$, atunci $[x] = 0$, $\{x\} = x$ şi elementele $0, x, x$,cu $x \neq 0$, nu pot forma o progresie geometrică...1 p

Fie $x \geq 1$. Atunci $\{x\} < [x] \leq x$, iar elementele mulţimii $\{x, \{x\}, [x]\}$ formează o progresie geometrică dacă şi numai dacă avem $x\{x\} = [x]^2$ ....2 p

Relaţia $x\{x\} = [x]^2$ implică $x^2 - x[x] - [x]^2 = 0$. Deducem $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}[x]$ ....2 p

Însă cum $x < [x] + 1$, se obţine $\frac{\sqrt{5}-1}{2}[x] < 1$, adică $[x] < \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ ....1 p

Rezultă $[x] = 1$, deci $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ....1 p

Concluzie. $x \in \left\{0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$...1 p

Oficiu ....1 p

Total..**10 p**

Problema 2. a) Avem $(x_{n-1} - 1)^2 = x_n - x_{n-1}$, de unde rezultă $x_n = 1 - x_{n-1} + x_{n-1}^2$, oricare ar fi $n \geq 2$...1 p

Se demonstrează că propoziţia $P(n) : x_n = 1 + x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1}$ este adevărată oricare ar fi $n \geq 2$ prin inducţie matematică după n..1 p

Pentru $n = 2$, avem $x_2 = 1 - 2 + 4 = 3$, deci $x_2 = 1 + x_1$, prin urmare $P(2)$ este adevărată... 1 p

Presupunem că $P(n)$ este adevărată pentru un $n \geq 2$, deci $x_n = 1 + x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1}$.

Deducem $x_{n+1} = 1 - x_n + x_n^2 = 1 + (x_n - 1)x_n = 1 + (x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1})x_n$, adică propoziţia $P(n+1)$ este adevărată..2 p

b) Se observă că termenii şirului sunt nenuli. Atunci, prin împărţire cu $x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1} x_n$ propoziţia de la a) este echivalentă cu propoziţia "$\frac{1}{x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1}} = \frac{1}{x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1} x_n} + \frac{1}{x_n}$ este adevărată oricare ar fi $n \geq 2$". ....1 p

Deducem succesiv $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1} x_n} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1}} = ...$ $= \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1} = 1$, oricare ar fi $n \geq 2$...2 p

Cum $\frac{1}{x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1} x_n} > 0$, se obţine inegalitatea din enunţ ....1 p

Oficiu ....1 p

Total..**10 p**

Problema 3. a) Din $\overline{QA} + \overline{QB} = \overline{QD}$ deducem că $\overline{QD}$ este diagonală în paralelogramul $ADBQ$, de unde rezultă că $\overline{QB} = \overline{AD}$. ....2 p

Din $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{DB}$, folosind regula triunghiului de adunare a vectorilor liberi, deducem $\overline{MA} + \left(\overline{MA} + \overline{AB}\right) = \overline{DA} + \overline{AB}$, de unde $2\overline{MA} = \overline{DA}$, sau $2\overline{AM} = \overline{AD}$. Cum $\overline{AD} = \overline{BC}$, rezultă egalitatea $2\overline{AM} = \overline{BC}$. În particular, deducem că punctul M este mijlocul segmentului $[AD]$. ....2 p

b) Stabilirea configuraţiei geometrice, eventual figura ....1 p

Punctul P este intersecţia a două mediane ale triunghiului ADQ, deci este centrul de greutate al triunghiului ADQ...2 p

Concluzia: P centrul de greutate al triunghiului ADQ implică $\overline{PA} + \overline{PD} + \overline{PQ} = \overline{0}$. ....2 p

Oficiu ....1 p

Total..**10 p**

Problema 4. Fie AA', BB', cu $A' \in [BC]$, $B' \in [AC]$, două dintre bisectoarele interne ale triunghiului ABC.

Aplicând teorema bisectoarei se obţine $\overline{BA'} = \frac{c}{b+c}\overline{BC}$, $\overline{AB'} = \frac{c}{a+c}\overline{AC}$ ....2 p

Se obţine apoi $\overline{AA'} = \frac{b}{b+c}\overline{AB} + \frac{c}{b+c}\overline{AC}$, $\overline{BB'} = -\overline{AB} + \frac{c}{a+c}\overline{AC}$ ....1 p

Cum $I \in (AA')$, există un număr real $x \in (0,1)$ astfel încât $\overline{AI} = x\overline{AA'}$......................1 p

Deducem $\overline{BI} = \left(\frac{xb}{b+c} - 1\right)\overline{AB} + \frac{xc}{b+c}\overline{AC}$ .... 1 p

Vectorii $\overline{BI}$ şi $\overline{BB'}$ fiind coliniari, rezultă $\frac{\frac{xb}{b+c}-1}{-1} = \frac{\frac{xc}{b+c}}{\frac{c}{a+c}}$, de unde se obţine $x = \frac{b+c}{a+b+c}$ .... 1 p

Prin urmare avem $\overline{AI} = \frac{b}{a+b+c}\overline{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overline{AC}$. .... 1 p

Deducem apoi $a\overline{IA}+b\overline{IB}+c\overline{IC} = (a+b+c)\overline{IA}+b\overline{AB}+c\overline{AC} = \left(-b\overline{AB} - c\overline{AC}\right)+b\overline{AB}+c\overline{AC} = \bar{0}$. Prin urmare centrul cercului înscris în triunghiul ABC verifică relaţia din enunţ................. 1 p

Reciproc, fie I' un punct care verifică relaţia dată. Deducem că $(a+b+c)\,\overline{II'} = \bar{0}$, şi cum $a+b+c \neq 0$, rezultă că $\overline{II'} = \bar{0}$, adică punctele I şi I' coincid. .... 1 p

Oficiu .... 1 p

Total .... **10 p**

Observaţie. Soluţia trebuie să includă o demonstraţie a expresiei vectorului de poziţie al centrului cercului înscris în triunghi.

Notă: Orice rezolvare corectă, completă sau parţială, va fi notată cu punctajul corespunzător.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a IX-a
Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1. Să se determine numerele reale pozitive x pentru care elementele mulţimii $\{x, \{x\}, [x]\}$ formează o progresie geometrică.

Problema 2. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$ verifică $x_1 = 2$ şi $x_{n-1} = 1 + \sqrt{x_n - x_{n-1}}$, $n \geq 2$. Să se arate că:

a) $x_n = 1 + x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1}$, oricare ar fi $n \geq 2$.

b) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n} < 1$, oricare ar fi $n \geq 2$.

G.M.-B nr. 11/2009

Problema 3. Fie $ABCD$ un paralelogram şi fie Q, M puncte în planul său astfel încât $\overline{QA} + \overline{QB} = \overline{QD}$ şi $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{DB}$.

a) Arătaţi că $\overline{QB} = \overline{AD}$ şi $2\overline{AM} = \overline{BC}$.

b) Dacă P este punctul de intersecţie al dreptelor AB şi QM, demonstraţi că $\overline{PA} + \overline{PD} + \overline{PQ} = \bar{0}$.

G.M.-B nr. 11/2012

Problema 4. Fie a, b, c respectiv lungimile laturilor BC, CA, AB ale triunghiului ABC. Să se arate că punctul I este centrul cercului înscris în triunghiul ABC dacă şi numai dacă

$$a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = \bar{0}.$$

Notă:

- Timp de lucru: 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 şi 10.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1.

Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încât $g \circ f$ este funcţie injectivă şi $f \circ g$ este funcţie surjectivă. Să se arate că f şi g sunt funcţii bijective.

***

Problema 2.

Fie $a, b, c > 0$, numere reale cu $abc = 1$. Să se arate că

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq ab + bc + ac + a + b + c.$$

G. M. C: 2697

Problema 3.

Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10.$$

***

Problema 4.

Dacă $z + \frac{1}{z} = 2\cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$, să se calculeze $z^n + z^{-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

***

Notă:

Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10;
Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 9 februarie 2013
Barem de corectare

Problema 1.

Problema 1.

Oficiu ______ 1p
Demonstrarea fapului că f este injectivă ______ 2p
Demonstrarea fapului că f este surjectivă ______ 2p
Demonstrarea fapului că g este injectivă ______ 2p
Demonstrarea fapului că g este surjectivă ______ 3p
Total ______ 10p

Problema 2.

Oficiu ______ 1p
Alegerea a două numere a şi b astfel încât $(a-1)(b-1) \geq 0$ ______ 2p
Deducerea inegalităţii $1+c \geq ac+bc$ ______ 2p
Reducerea inegalităţii la forma $a^2+b^2+c^2+3 \geq 1+c+ab+a+b+c$ 2p
Scrierea inegalităţii sub forma $\left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+3\left(\frac{b-1}{2}\right)^2+(c-1)^2 \geq 0$ ______ 3p
Total ______ 10p

Problema 3.

Oficiu ______ 1p
Considerarea notaţiei $t=\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x$ ______ 2p
Rescrierea ecuaţiei sub forma $t+\frac{1}{t}=10$ ______ 3p
Rezolvarea ecuaţiei $t+\frac{1}{t}=10$ ______ 2p
Deducerea rădăcinilor $x_{1,2}=\pm 2$ ______ 2p
Total ______ 10p

Problema 4.

Oficiu ______ 1p
Rezolvarea ecuaţiei şi deducerea soluţiilor $z_{1,2}=\cos(x) \pm i\sin(x)$ ______ 5p
Deducerea faptului că $z^n+z^{-n}=2\cos(nx)$ ______ 4p
Total ______ 10p

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a X-a
Craiova, 9 februarie 2013
Soluţii

Problema 1.

Fie $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Deducem că $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, iar cum $g \circ f$ este injectivă avem că $x_1 = x_2$. Aşadar, f este injectivă.

Fie $y \in \mathbb{R}$. Din faptul că $f \circ g$ este surjectivă obţinem că există $x' \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(g(x')) = y$. Aşadar, există $x = g(x') \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$, deci f este surjectivă. In concluzie, f este bijectivă.

Fie $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(y_1) = g(y_2)$. Folosind faptul că f este surjectivă, deducem că există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x_1) = y_1$ si $f(x_2) = y_2$. Astfel, avem că $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, deci $x_1 = x_2$ şi $y_1 = y_2$. Am demonstrat astfel că g este injectivă.

Fie $x \in \mathbb{R}$ şi fie $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Cum $f \circ g$ este surjectivă avem că există $x_1 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(g(x_1)) = y$, deci $f(g(x_1)) = f(x)$. Folosind injectivitatea lui f obţinem că $g(x_1) = x$, adică g este surjectivă. In concluzie, f este bijectivă.

Problema 2.

Pentru că $abc = 1$, avem că două dintre numerele a, b, c sunt la fel aşezate faţă de 1, fie acestea a şi b. Obţinem astfel că $(a-1)(b-1) \geq 0$, adică

$$ab + 1 \geq a + b.$$

Inmulţind ultima inegalitate cu c deducem că

$$1 + c \geq ac + bc.$$

In concluzie, va fi suficient să arătăm că

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 1 + c + ab + a + b + c.$$

Demonstraţie se incheie pentru că ultima inegalitate se poate rescrie astfel

$$\left(a - \frac{b+1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{b-1}{2}\right)^2 + (c-1)^2 \geq 0.$$

Problema 3.

Dacă vom nota prin $t = \left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x$ ecuaţia

$$\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10$$

devine

$$t + \frac{1}{t} = 10.$$

Obţinem rădăcinile

$$t_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6},$$

deci avem rădăcinile $x_{1,2} = \pm 2$.

Problema 4.

Rezolvând ecuaţia $z + \frac{1}{z} = 2\cos(x)$ obţinem că

$$z_{1,2} = \cos(x) \pm i\sin(x).$$

Deducem astfel că

$$z^n + z^{-n} = \cos(nx) + i\sin(nx) + \cos(nx) - i\sin(nx) = 2\cos(nx).$$

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului
şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a XI-a

Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale convergent la a, având toţi termenii diferiţi de a, şi fie $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ o funcţie. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k(n)} = a$;

(b) pentru orice $y \in \mathbb{N}$ mulţimea $\{x \in \mathbb{N} | k(x) = y\}$ este finită (mulţimea vidă este finită, având *zero* elemente).

Problema 2. Fie $a, b > 0$ şi funcţiile $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b^3$ şi

$$f\left(\frac{ax^2+b}{\sqrt{1+x^4}}\right) \cdot g(x) = x \quad \text{pentru orice } x > 0.$$

Să se arate că funcţia g nu este mărginită.

Problema 3. Demonstraţi că toţi termenii şirului definit prin relaţiile

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = 1 + 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 6x_n + 1},\ n \geq 0,$$

sunt numere naturale.

Problema 4. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 2013 & 2011 & 0 \\ -2012 & 0 & 2011 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^n, unde $n \in \mathbb{N}$.

Notă:
1. Toate subiectele sunt obligatorii.
2. Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 (din oficiu) la 10.
3. Timp de lucru: 3 ore.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a XI-a

Craiova, 9 februarie 2013

Barem de corectare

Problema 1.

Existenţa unui şir $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, strict crescător şi nemărginit superior ... 4p
Divergenţa şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ... 2p
Construcţia lui $n_1(\varepsilon)$ ... 2p
Convergenţa şirului $(a_{k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ ... 1p
Oficiu ... 1p
Total ... 10p

Problema 2.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^2+b}{\sqrt{1+x^4}}=a$ ... 5p
$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\frac{1}{b^3}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ ... 3p
Nemărginirea lui g ... 1p
Oficiu ... 1p
Total ... 10p

Problema 3.

$x_{n+1}^2+x_n^2-4x_nx_{n+1}-2x_{n+1}-2x_n=0$ ... 3p
$x_{n+2}=4x_{n+1}-x_n-2$ ... 4p
Inducţia matematică ... 2p
Oficiu ... 1p
Total ... 10p

Problema 4.

$A=2011I_3+B$ ... 4p
$B^3=O_3$ ... 3p
$A^n=(2011I_3+B)^n=2011^nI_3+n2011^{n-1}B+\frac{n(n-1)}{2}2011^{n-2}B^2$ ... 2p
Oficiu ... 1p
Total ... 10p

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a XI-a

Craiova, 9 februarie 2013

Soluţii

Problema 1. Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale convergent la a, având toţi termenii diferiţi de a, şi fie $k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ o funcţie. Demonstraţi că următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{k(n)} = a$;

(b) pentru orice $y\in\mathbb{N}$ mulţimea $\{x\in\mathbb{N} | k(x)=y\}$ este finită (mulţimea vidă este finită, având *zero* elemente).

Soluţie. $(a) \Longrightarrow (b)$ Dacă pentru un $y_0\in\mathbb{N}$ mulţimea $\{x\in\mathbb{N}|k(x)=y_0\}$ ar fi infinită, ea ar include un şir strict crescător şi nemărginit superior, notat cu $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Atunci, şirul $(a_{k(u_n)})_{n\in\mathbb{N}}$, unde $a_{k(u_n)} = a_{y_0} \neq a$, este un subşir constant al şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. În concluzie, acesta din urmă nu mai poate converge la a.

$(b) \Longrightarrow (a)$ Oricare ar fi $\varepsilon>0$ există $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ astfel încât $|a_n-a|<\varepsilon$ pentru orice $n\geq n(\varepsilon)$. Mulţimile $(M_i)_{0\leq i\leq n(\varepsilon)}$, unde $M_i=\{x\in\mathbb{N}|k(x)=i\}$, fiind finite, există $n_1(\varepsilon)$ astfel încât $n\notin \bigcup\limits_{0\leq i\leq n(\varepsilon)} M_i$ pentru orice $n\geq n_1(\varepsilon)$. Aceasta ne conduce la $k(n)>n(\varepsilon)$ pentru orice $n\geq n_1(\varepsilon)$. Deci $|a_{k(n)}-a|<\varepsilon$ pentru orice $n\geq n_1(\varepsilon)$. ∎

Problema 2. Fie a, $b>0$ şi funcţiile f, $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ astfel încât $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b^3$ şi

$$f\left(\frac{ax^2+b}{\sqrt{1+x^4}}\right)\cdot g(x) = x \quad \text{pentru orice } x>0.$$

Să se arate că funcţia g nu este mărginită.
Soluţie. Observăm că $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^2+b}{\sqrt{1+x^4}} = a$, de unde rezultă că

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{b^3} \cdot \lim_{x\to+\infty} x = +\infty.$$

Am obţinut că $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, deci g nu poate fi mărginită. ∎

Problema 3. Demonstraţi că toţi termenii şirului definit prin relaţiile

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = 1 + 2x_n + \sqrt{3x_n^2 + 6x_n + 1},\ n \geq 0,$$

sunt numere naturale.
Soluţie. Observăm că şirul este strict crescător. Ridicând la pătrat relaţia de recurenţă, obţinem

$$x_{n+1}^2 + x_n^2 - 4x_n x_{n+1} - 2x_{n+1} - 2x_n = 0.$$

Din această relaţie scădem relaţia omoloagă obţinută prin înlocuirea $n \to n+1$ şi ajungem la

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n - 2, \qquad n \geq 1.$$

Cum $x_1 = 0$ şi $x_2 = 2$, concluzia rezultă prin inducţie matematică. ∎

Problema 4. Fie matricea

$$A = \begin{pmatrix} 2011 & 2012 & 2013 \\ 2013 & 2011 & 0 \\ -2012 & 0 & 2011 \end{pmatrix}.$$

Să se calculeze A^n, unde $n \in \mathbb{N}$.
Soluţie. Observăm că $A = 2011 \cdot I_3 + B$, unde

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2012 & 2013 \\ 2013 & 0 & 0 \\ -2012 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & a+1 \\ a+1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

şi

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a(a+1) & (a+1)^2 \\ 0 & -a^2 & -a(a+1) \end{pmatrix}, \qquad B^3 = O_3.$$

Astfel, $A^n = (2011 \cdot I_3 + B)^n = 2011^n \cdot I_3 + n \cdot 2011^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2011^{n-2} B^2$, unde $n \geq 2$. ∎

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a XII-a
Craiova, 9 februarie 2013

Problema 1. Pe Z considerăm legea de compoziţie internă ,,$\circ$" definită pentru $x, y \in Z$ prin

$$x \circ y = axy + b(x+y) + c,$$

unde $a, b, c \in Z$.

Să se arate că:

(i) Legea de compoziţie ,,$\circ$" este asociativă dacă şi numai dacă

$$b^2 - b - ac = 0.$$

(ii) Dacă $b^2 - b - ac = 0$, atunci legea de compoziţie ,,$\circ$" admite element neutru dacă şi numai dacă b divide c.

***

Problema 2. Să se arate că grupurile $(R, +)$ şi $(R^*, \cdot)$ nu sunt izomorfe.

***

Problema 3. Să se calculeze $\int \sin x \cos x \cos(2x) ... \cos(2^{2013}x)dx$.

***

Problema 4. Să se determine numerele reale a şi b astfel încât $f : [-1, 1] \to R$,

$$f(x) = \begin{cases} a + \sin\frac{1}{x}, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ b + \sin\frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

să admită primitive pe $[-1, 1]$.

(Gazeta Matematică)

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii;
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 1 la 10;
Timp de lucru: 3 ore.

Inspectoratul Şcolar Judeţean Dolj
Filiala Craiova a SSMR

Etapa locală a Olimpiadei naţionale de matematică
Clasa a XII-a
Craiova, 9 februarie 2013
Barem de corectare

Problema 1.
Oficiu ______ 1p
(i) ______ 4p
(ii), „$\Rightarrow$” ______ 2p
„$\Leftarrow$” ______ 3p
Total ______ 10p

Problema 2.
Oficiu ______ 1p
Presupunere prin absurd ______ 3p
Există $a \in R$ astfel ca $f(a) = -1$ ______ 2p
$a = 0$ ______ 2p
$1 = -1$,absurd ______ 2p
Total ______ 10p

Problema 3.
Oficiu ______ 1p
Identitatea $\sin x \cos x \cos(2x) \ldots \cos(2^{2013}x) = \frac{\sin(2^{2014}x)}{2^{2014}}$ ______ 5p
Finalizare ______ 4p
Total ______ 10p

Problema 4.
Oficiu ______ 1p

$$g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

admite primitive ______ 3p
$f = g + h$ cu

$$h(x) = \begin{cases} a, & x \in [-1, 0) \\ 0, & x = 0 \\ b, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

______ 2p
f admite primitive dacă şi numai dacă h admite primitive ______ 3p
f admite primitive dacă şi numai dacă $a = b = 0$ ______ 1p
Total ______ 10p