INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 9.02.2013
Clasa a VIII-a

1. (3p) a) Rezolvaţi în mulţimea numerelor naturale ecuaţia:

$$xyz - xy - xz - yz + x + y + z = 2014.$$

(4p) b) Demonstraţi că există *a, b, c, d* numere naturale nenule şi distincte, astfel ca

$$2013 = a^2 - b^2 - c^2 + d^2.$$

Petru Vlad

2. (7p) Pentru $a > 0$ şi $b > 0$ notăm $G(a,b) = \sqrt{ab},\ H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$. Arătaţi că:

$$G(a, H(a,b)) \le H(a, G(a,b)).$$

GMB2012

3. (7p) Considerăm în spaţiu punctele A, B, C, D şi M, N mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[CD]$. Demonstraţi că, dacă $MN = \frac{BC + AD}{2}$, atunci punctele A, B, C, D sunt coplanare.

***

4. Se consideră trapezul dreptunghic *ABCD*, având $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90^0, m(\sphericalangle B) = 60^0$. În punctul O, intersecţia diagonalelor, se ridică perpendiculara OM pe planul trapezului. Dacă $OM = \frac{5\sqrt{33}}{3}, AB = 2DC, DC = 5$, calculaţi:

(4p) a) distanţa de la punctul M la latura (BC).

(3p) b) distanţa de la punctul O la planul (MCB).

Gheorghe Floarea

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

Barem de corectare OLM Clasa a VIII-a, 2013

1. a) $xyz-xy-yz-xz+y+x+z-1=2013$ .... **(1p)**
Grupând termenii convenabil rezultă: $(x-1)(y-1)(z-1)=2013=3\cdot 11\cdot 61$ .... **(1p)**
Soluţii sunt toate permutările tripletelor
$(2,2,2014),(2,4,672),(2,12,184),(2,62,34),(4,12,62)$ .... **(1p)**
b) $2013=3\cdot 11\cdot 61=\left(2^2-1\right)\left(36-25\right)\left(36+25\right)=$ .... **(2p)**
$\left(2^2-1\right)\left(36^2-25^2\right)=72^2-50^2-36^2+25^2$ .... **(1p)**
$\Rightarrow a=72, b=50, c=36, d=25$ .... **(1p)**

2. $G(a,H(a,b))=a\sqrt{\dfrac{2b}{a+b}}, H(a,G(a,b))=\dfrac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ .... **(2p)**
$\dfrac{a\sqrt{2b}}{\sqrt{a+b}}\le\dfrac{2a\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}\le\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ .... **(2p)**
$\sqrt{a}+\sqrt{b}\le\sqrt{2(a+b)}\Rightarrow a+b+2\sqrt{ab}\le 2(a+b)\Rightarrow a+b-2\sqrt{ab}\ge 0$ .... **(2p)**
$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0\Rightarrow G\left(a,H\left(a,b\right)\right)\le H\left(a,G\left(a,b\right)\right)$ .... **(1p)**

3. Fie E mijlocul segmentului (AC).. **(1p)**
În $ME=\dfrac{BC}{2}, NE=\dfrac{AD}{2}$ (linii mijlocii în triunghiuri)...................................... **(1p)**
$ME+NE=\dfrac{BC}{2}+\dfrac{AD}{2}=MN$ .... **(2p)**
$\Rightarrow M, E, N$ coliniare.. **(1p)**
Din $ME\parallel BC, EN\parallel AD$ avem $BC\parallel AD$, deci A, B, C, D coliniare .... **(2p)**

4. a) ΔABC este echilateral.. **(1p)**
$\Delta DOC\sim\Delta BOA\Rightarrow OC=\dfrac{10}{3}$ .... **(1p)**
$\Delta CAT\left(AT\perp BC\right), OP\perp BC\Rightarrow\dfrac{OP}{AT}=\dfrac{1}{3}, AT=5\sqrt{3}\Rightarrow OP=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$ .... **(1p)**
ΔMOP dreptunghic $\Rightarrow MP=10$ .... **(1p)**
b) Perpendiculara din O pe MC (în ΔMOP) este distanţa căutată.............................. **(2p)**
$OS=\dfrac{MO\cdot OP}{MP}\Rightarrow OS=\dfrac{5\sqrt{11}}{6}$ .... **(1p)**