INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 09.02.2013
Clasa a VII-a

1. Se consideră expresia $E(x) = x + 3$, unde x este un număr real.

(3p) a) Arătaţi că media aritmetică a numerelor $E(\sqrt{3})$ şi $E(-\sqrt{3})$ este un număr natural.

(4p) b) Dacă *n* este un număr întreg strict negativ, determinaţi valorile lui *n* pentru care

$$3\sqrt{3} - E(n) > 3 - E(n\sqrt{3}).$$

***

2. (4p) a) Aflaţi numărul raţional nenul *x*, care verifică egalitatea:

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{x} + \frac{5}{x} + ... + \frac{2013}{x} = 1 + 3 + 5 + ... + 105$$

(3p) b) Pentru *x* determinat anterior, rezolvaţi în mulţimea numerelor raţionale ecuaţia

$$(x-1):10 = y^2.$$

Doina Negrilă

3. (7p) În paralelogramul *ABCD* alegem $M \in [DC]$, astfel încât $CM = 2DM$ şi $N \in [BC]$, astfel încât $BN = 2NC$. Ştiind că aria triunghiului *CMN* este egală cu 16 cm^2, aflaţi aria paralelogramului *ABCD*.

GMB2012

4. Se consideră pătratul *ABCD* şi punctele $E \in [BC]$ şi $F \in DC$ (*D* este între *F* şi *C*), astfel încât $[BE] \equiv [FD]$. Demonstraţi că:

(3p) a) $m(\sphericalangle FAE) = 90^o$.

(2p) b) dacă *FAEH* este pătrat, atunci $m(\sphericalangle FCH) = 45^o$.

(2p) c) dreptele *AH*, *FE* şi *BD* sunt concurente.

Simona Dumitrescu

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.

Barem de corectare OLM Clasa a VII-a, 2013

1. a) $E(\sqrt{3})=\sqrt{3}+3;\ E(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}+3$ ....**(1p)**

$m_a=\dfrac{E(\sqrt{3})+E(-\sqrt{3})}{2}$ ....**(1p)**

$m_a=3\in \mathbb{N}$ ....**(1p)**

b) $E(n)=n+3,\ E(n\sqrt{3})=n\sqrt{3}+3$ ....**(1p)**

$3\sqrt{3}-E(n)>3-E(n\sqrt{3})\Leftrightarrow\sqrt{3}(n+3)>n+3\Leftrightarrow(n+3)(\sqrt{3}-1)>0$ ....**(2p)**

$\sqrt{3}-1>0\Rightarrow n+3>0\Rightarrow n\in\{-2,-1\}$ ....**(1p)**

2. a) $1+3+5+...+2013=\dfrac{2014\cdot 1007}{2}=1007^2$ ....**(1p)**

$1+3+5+...+105=\dfrac{106\cdot 53}{2}=53^2$ ....**(1p)**

Ecuaţia este echivalentă cu: $\dfrac{1007^2}{x}=53^2\Rightarrow x=\left(\dfrac{1007}{53}\right)^2\Rightarrow x=19^2\Rightarrow x=361$........**(2p)**

b) $x=361\Rightarrow(361-1):10=y^2\Rightarrow y^2=36$ ....**(2p)**

$S=\{-6,6\}$ ....**(1p)**

3. Figura corectă..**(1p)**

$DM\overset{not}{=}a, NC\overset{not}{=}b\Rightarrow MC=2a, NB=2b, PT\perp AB, N\in PT, T\in AB, P\in CD$ ....**(1p)**

$BT\parallel PC\overset{T.Thales}{\Rightarrow}\dfrac{NP}{PT}=\dfrac{NC}{BC}\Rightarrow\dfrac{NP}{PT}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow PT=3NP$ ....**(2p)**

$\mathcal{A}_{\Delta CMN}=16cm^2\Rightarrow\dfrac{NP\cdot MC}{2}=16\Rightarrow a\cdot NP=16$ ....**(1p)**

$\mathcal{A}_{ABCD}=DC\cdot PT=3a\cdot 3NP=9aNP\Rightarrow\mathcal{A}_{ABCD}=144\,\text{cm}^2$.............................**(2p)**

(Soluţia cu raportul de asemănare se punctează corespunzător)

4. a) Figura completă..**(1p)**

$\Delta ABE\overset{(C.C.)}{\equiv}\Delta ADF\Rightarrow m(B\hat{A}E)=m(F\hat{A}D)$ ....**(1p)**

$m(B\hat{A}E)+m(E\hat{A}D)=90^0\Rightarrow m(F\hat{A}D)+m(E\hat{A}D)=90^0\Rightarrow m(F\hat{A}E)=90^0$ ....**(1p)**

b) Metoda I: $FC\cap EH=\{P\}$

$$\Delta HPF\overset{(U.U.)}{\sim}\Delta CPE\Rightarrow\frac{PH}{PC}=\frac{PF}{PE}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{PH}{PF}=\dfrac{PC}{PE}\\ F\hat{P}E\equiv H\hat{P}C\end{array}\right|\Rightarrow\Delta PHC\overset{(L.U.L.)}{\sim}\Delta PFE\Rightarrow$$

$m(P\hat{C}H)=m(P\hat{E}F)=45^0\Rightarrow m(F\hat{C}H)=45^0$ ....**(2p)**

Metoda a II-a: Q centrul pătratului $AEHF$, deci $m(H\hat{Q}E)=90^0$ şi $HQ=\dfrac{FE}{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta FCE, m(\hat{C}) = 90^0 \\ [FQ] \equiv [QE]\end{array}\right| \Rightarrow CQ = \frac{FE}{2} \Rightarrow [HQ] \equiv [CQ] \Rightarrow \Delta HQC \text{ isoscel}$$

$m(Q\hat{F}C) = m(Q\hat{C}F) = x \Rightarrow m(C\hat{Q}E) = 2x$, $m(H\hat{Q}C) = 90^0 - 2x \Rightarrow m(H\hat{C}Q) = 45^0 + x$,

$\Rightarrow m(F\hat{C}H) = 45^0$ ....**(2p)**

c) $m(B\hat{D}C) = m(D\hat{C}H) = 45^0$ (alterne interne) $\Rightarrow BD \parallel CH$ ....**(1p)**

O centrul pătratului $ABCD$, $[QO]$ linie mijlocie în $\Delta ACH \Rightarrow QO \parallel CH \Rightarrow Q$, O, B coliniare $\Rightarrow AH$, FE şi BD concurente în Q..**(1p)**