INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN SIBIU

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
FAZA LOCALĂ, 9.02.2013
Clasa a VI-a

1. (7p) Determinaţi numerele naturale *a* şi *b* al căror cel mai mic multiplu comun este de 15 ori mai mare decât cel mai mare divizor comun şi $5a+3b=150$.

GMB2012

2. (3p) a) Aflaţi numărul natural *a* de trei cifre, ştiind că $S\cdot a$ este număr natural, unde

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 11}+\cdots+\frac{15}{106\cdot 121}.$$

Monica Guita

(4p) b) Determinaţi fracţiile ireductibile de forma $\frac{\overline{1505a}}{\overline{5b}}$, ştiind că $\overline{5b}\,\vdots\,5$.

Adina Oancea

3. Pe o dreaptă se consideră punctele distincte A, B, C, D, M, în această ordine, astfel încât *B* este mijlocul segmentului $[AC]$, $[MD]\equiv[DC]\equiv[AC]$ şi $[BD]=6$ cm.

(5p) a) Calculaţi distanţa de la *A* la *D*.

(2p) b) Aflaţi lungimea segmentului [*AM*].

***

4. (7p) Se consideră dreptele *AB* şi *CD* concurente în *O*, astfel încât $m(\sphericalangle AOC)=\frac{2}{7}m(\sphericalangle BOC)$, iar punctul *E* în acelaşi semiplan cu *D* faţă de dreapta *AB*, astfel încât $m(\sphericalangle DOE)=90^o$. Dacă [*OF* este bisectoarea unghiului *AOE* şi [*OH* este semidreapta opusă semidreptei [*OF*, determinaţi măsura unghiului *BOH*.

Monica Guita

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 2 ore.

Barem de corectare OLM – 2013 Clasa a VI-a, 2013

1. Fie d = (a, b) şi $m = [a, b]$ avem:

$a = dx$, $b = dy$, $(x, y) = 1$ şi $5dx + 3dy = 150$ şi $m = 15d$...**(2p)**

Dar $dm = ab$, deci $m = dxy$ şi cum $m = 15d$, rezultă $xy = 15$..**(1p)**

Avem $(x, y) \in \{(1, 15); (15, 1); (3, 5); (5, 3)\}$ ....**(1p)**

Pentru $(x, y) \in \{(15, 1); (5, 3)\} \Rightarrow d \notin \mathbb{N}$..**(1p)**

Pentru $(x, y) = (1, 15)$, rezultă $d = 3$, $a = 3$, $b = 45$ ....**(1p)**

Pentru $(x, y) = (3, 5)$, rezultă $d = 5$, $a = 15$, $b = 25$..**(1p)**

2. a) $S = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + ... + \frac{1}{106} - \frac{1}{121} = \frac{1}{1} - \frac{1}{121} = \frac{120}{121}$ ....**(2p)**

Pentru $S \cdot a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in M_{121}$ şi cum a este de trei cifre,

avem $a \in \{121, 242, 363, 484, 605, 726, 847, 968\}$ ....**(1p)**

b) $\overline{5b} \vdots 5 \Rightarrow b \in \{0, 5\}$, pentru $b = 0 \Rightarrow \overline{5b} = 50 = 2 \cdot 5^2$

deci $a \notin \{0, 2, 4, 5, 6, 8\} \Rightarrow a \in \{1, 3, 7, 9\}$...**(1p)**

Avem fracţiile ireductibile $\frac{15051}{50}$, $\frac{15053}{50}$, $\frac{15057}{50}$, $\frac{15059}{50}$ ....**(1p)**

pentru $b = 5 \Rightarrow \overline{5b} = 55 = 5 \cdot 11$,

deci $a \notin \{0, 5, 9\} \Rightarrow a \in \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8\}$..**(1p)**

Avem fracţiile ireductibile $\frac{15051}{55}$, $\frac{15052}{55}$, $\frac{15053}{55}$, $\frac{15054}{55}$, $\frac{15056}{55}$, $\frac{15057}{55}$, $\frac{15059}{55}$ ......**(1p)**

3. a) Din B mijlocul lui (AC) rezultă $AB = BC$...**(1p)**

$MD = DC = CA = 2BC$ ....**(1p)**

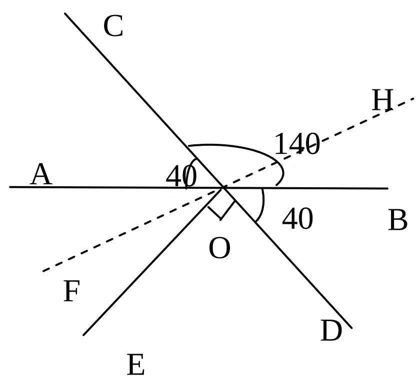
$BD = BC + CD = BC + 2BC = 3BC$, deci $BC = 2$ cm...**(2p)**

$AD = AC + CD = 4AB = 8$ cm ....**(1p)**

b) $AM = 3AC = 3 \cdot 2BC = 12$cm ....**(2p)**

4.

Figura..**(1p)**



m($\sphericalangle AOC$) + m($\sphericalangle COB$) = 180^o

$\frac{2}{7}$ m($\sphericalangle COB$) + m($\sphericalangle COB$) = 180^o ....**(1p)**

m($\sphericalangle COB$) = 140^o ....**(1p)**

m($\sphericalangle AOC$) = 40^o ....**(1p)**

m($\sphericalangle AOE$) = m($\sphericalangle COD$) – m($\sphericalangle AOC$) – m($\sphericalangle DOE$) =
$=180^o – 40^o – 90^o = 50^o$ ....**(1p)**

$\sphericalangle HOB \equiv \sphericalangle AOF$, unghiuri opuse la vârf ....**(1p)**

Deci m($\sphericalangle HOB$) = m($\sphericalangle AOF$) = m($\sphericalangle AOE$) : 2 = 50^o : 2 = 25^o ....**(1p)**