INSPECTORATUL SCOLAR JUDEŢEAN GORJ
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
FEBRUARIE 2013

CLASA A IX-A

Subiectul I. a) Demonstraţi, prin inducţie matematică, după numarul de cifre ale numarului n natural, că produsul cifrelor lui, p(n), este mai mic sau cel mult egal cu n .

b) Determinaţi numărul n dacă p(n) = n^2 - 42 n + 440.

Subiectul II. Triunghiului ABC i se circumscrie cercul cu centrul O şi diametrul său [AA_1] este paralel cu latura[BC]. Fie H ortocentrul triunghiului ABC. Demonstraţi că dreapta BC împarte segmentul [OH] în două segmente congruente.

Subiectul III. Demonstraţi că :

a) $[x^3+(x+y)^3]\cdot[y^3+(x+y)^3]\leq 4\cdot(x+y)^6, \forall x,y\in$ **R** .
b) Găsiţi numerele naturale n pentru care 2^n-1 se divide cu 7.

Subiectul IV. Fie ABCDE un pentagon convex şi P $\in$ (DE). Notăm G_1,G_2, G_3,G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor ADE, APB, ABC şi respectiv APC. Să se arate că $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram dacă şi numai dacă P este mijlocul segmentului (DE).

TIMP DE LUCRU 3 0RE. FIECARE SUBIECT ESTE NOTAT CU 7 PUNCTE

CLASA A X-A

1. a) Să se demonstreze că $x^3-3x+2\geq 0$ pentru orice $x\geq -2.$

b) Fie $a,b,c>1.$ Să se arate că $\log_a\left(b^{2013}-2b+2\right)+\log_b\left(c^{2013}-2c+2\right)+\log_c\left(a^{2013}-2a+2\right)\geq 3.$

2. Se consideră mulţimea $A=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}.$

a) Să se arate că $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2013}\in A$.
b) Să se arate că pentru orice $z_1,z_2\in A$ avem $z_1\cdot z_2\in A.$.
c) Să se determine $z_1,z_2,z_3\in A$ astfel încât $z_1+z_2+z_3=3.$

3. a) Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=n+(-1)^n$. Să se arate că $f(f(n))=n,$ pentru orice $n\in\mathbb{N}.$ Este f bijectivă ? Justificare.

b) Să se arate că $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, g(n)=\left[n\sqrt{2}\right]$ este injectivă dar nu este surjectivă, unde $\left[n\sqrt{2}\right]$ reprezintă partea întreagă a numărului $n\sqrt{2}.$

4. Fie A o mulţime de numere reale care verifică simultan condiţiile:

(i) $2013\in A$ (ii) $2x\in A$ pentru orice $x\in A$ (iii) $[\log_2 x]\in A$ pentru orice $x\in A$,

unde $[\log_2 x]$ reprezintă partea întreagă a numărului $\log_2 x.$

a) Să se arate că $1\in A.$
b) Să se arate că $n\in A$ pentru orice număr natural n .

CLASA A XI-A

1. Cu notaţiile obişnuite într-un triunghi ABC, arătaţi că:
$$\begin{vmatrix} -a & a-2c\cos B & a \\ b & -b & b-2a\cos C \\ c-2b\cos A & c & -c \end{vmatrix} = 0.$$

Benedict G. Niculescu, Bucureşti

Supliment Gazeta Matematică, nr.11/2012

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Arătaţi că pentru orice n natural nenul există $x_n, y_n \in Z$ astfel încât $A^n = x_n A + y_n I_2$.

   b) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$.

***

3. Se consideră şirurile $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ şi $f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, unde $n \in N^*$.

   a) Arătaţi că $(e_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător şi $(f_n)_{n\geq 1}$ strict descrescător.

   b) Ştiind că cele două şiruri au limita e, arătaţi că $\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$, $\forall n \geq 1$.

   c) Studiaţi convergenţa şirului $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)$.

***

4. Calculaţi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{an^3 + n^2 + 2n + 1} - \sqrt{4n^2 - n + 2}$.Discuţie după parametul real a.

***

CLASA A XII-A

SUBIECTUL I

Calculaţi $\int \frac{\ln x - 1}{x^2 + (\ln x)^2}$ dx, x>1.

SUBIECTUL II

Fie a,b numere reale astfel încât 0<a<b si f:[a,b]→R de două ori derivabilă pe [a,b] cu f'' continuă. Daca $\int_a^b f(x)dx = \frac{a^2}{2} \cdot f'(a) - \frac{b^2}{2} \cdot f'(b) + bf(b) - af(a)$, să se arate că ∃ c ∈ (a,b) astfel încât $f''(c) = 0$.

SUBIECTUL III

Fie (G,$\circ$) grup si $H \subset G$ subgrup astfel încât $H \neq G$.

a) Să se arate ca dacă $A \subset G - H$ este finit şi nevidă, atunci $\exists x, y \in A$ astfel încât $x \circ y \notin A$.

b) Daca H_1, H_2 sunt subgrupuri ale lui G si $G = H_1 \cup H_2$, atunci $H_1 \subset H_2$ sau $H_2 \subset H_1$.

SUBIECTUL IV

Sa se determine funcţia $f : R \to R_+$ care admite primitive F, pentru care avem relaţia $f(x) \cdot F(1-x) = 1 + x^2$, $\forall x \in R$

BAREME

CLASA A IX-A

1a) Pentru numerele de o singura cifra exista egalitate. (1pct)

Presupunem ca p(n)$\leq$ n pentru orice numar natural cu mai putin de k cifre si fie n = $\overline{a_1 \ldots . a_k a_{k+1}}$

un numar arbitrar cu k + 1 cifre.

p(n) = $a_1 \cdots\cdots a_k \cdot a_{k+1} \leq 9 \cdot \overline{a_1 \ldots a_k} < 10 \cdot \overline{a_1 \ldots a_k} + a_{k+1} =$ n cctd.(2pct)

b) trebuie n^2 - 42 n + 440 $\leq$ n care conduce la n$\in$ [16, 26].(1pct)

Prin verificari se deduce n $\in$ {18, 20, 24}(3pct)

2. $\overrightarrow{OA_1} = -\overrightarrow{OA}$ (1pct) deci:

$\frac{\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{OA_1}}{2} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{2} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$ (3pct) adica mijlocul segmentului A_1H coincide cu cel al lui BC. (1pct)

Deoarece BC este paralela cu AA_1, atunci linia mijlocie a triunghiului OA_1H este inclusa in dreapta BC(1pct), deci mijlocul lui HO este situat pe BC.(1pct)

3.a) Pentru x, y $\geq$ 0 se face calculul si se verifica(1pct)

Pentru x, y < 0, notam x=-a, y=-b, a,b> 0 si se reduce la cazul precedent.(1pct)

Pentru x> 0 si y < 0 notam x+y =S si x y = P; avem de demonstrat ca

$P^3 + S^3(S^3 - 3SP) \leq 4S^6$ sau $3S^6 + 3S^4P - P^3 \geq 0$; impart prin P^3 (<0) si avem $3u^3 + 3u^2 - 1 \leq 0$ unde

u = $\frac{S^2}{P}$ < 0 ;notam u = -a (a > 0) si avem $3a^3 - 3a^2 + 1 \geq 0$ (2pct)adevarata pentru ca $a^3 > 0$ si $2a^3 + 1 - 3a^2 =$

$a^3 + a^3 + 1^3 - 3 \cdot a \cdot a \cdot 1 = (a + a + 1)(a^2 + a + a) > 0$.(1pct)

b) P(n): $2^n - 1 = 7m$, m$\in$ Z

Deoarece $2^{k+3} - 1 = 8 \cdot 2^k - 1 = 7 \cdot 2^k + (2^k - 1)$, avem P(k)$\Leftrightarrow$P(3)

P(0) adevarata si P(1), P(2) false, deducem ca n$\in$ {0, 3, 6, …, 3k, …}(2pct)

4. Fie S un punct oarecare din plan. $G_1G_2G_3G_4$ paralelogram $\Leftrightarrow$ G_1G_3 si G_2G_4 au acelasi mijloc (1pct)$\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{SG_1} + \overrightarrow{SG_3}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{SG_2} + \overrightarrow{SG_4})$ (1)(1pct); $\overrightarrow{SG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SE})$ şi încă trei analoage (4pct)care înlocuite în (1) şi, după reduceri, avem $\frac{1}{2}(\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SE}) = \overrightarrow{SP}$ $\Leftrightarrow$ P este mijlocul segmentului (DE).(1pct)

CLASA A X-A

1. a) se ajunge la $(x-1)^2(x+2)\geq 0$ (3p)

b) $\log_a\left(b^{2013}-2b+2\right)+\log_b\left(c^{2013}-2c+2\right)+\log_c\left(a^{2013}-2a+2\right)\geq$

$\log_a\left(b^3-2b+2\right)+\log_b\left(c^3-2c+2\right)+\log_c\left(a^3-2a+2\right)\geq \log_a b+\log_b c+\log_c a\geq 3.$ (4p)

2. a) (2p)

b) (2p)

c) fie $z_i=\cos\alpha_i+i\sin\alpha_i, i\in\{1,2,3\}$. Se ajunge la $\cos\alpha_1+\cos_2+\cos\alpha_3=3,$ deci

$\cos\alpha_1=\cos\alpha_2=\cos\alpha_3=1,$ deci $z_1=z_2=z_3=1.$ (3p)

3. a) $f\left(f\left(n\right)\right)=n,\ n\in\mathbb{N}$ (2p), deci f este inversabilă cu $f^{-1}=f$, deci f este bijectivă. (2p)

b) dacă g nu ar fi injectivă, ar exista $n,m\in\mathbb{N}, n>m$ cu $\left[n\sqrt{2}\right]=\left[m\sqrt{2}\right],$ deci $n\sqrt{2}-m\sqrt{2}<1,$

fals (2p) ; ecuaţia $g\left(n\right)=3$ (de exemplu) nu are soluţii (1p)

4. a) $[\log_2 2013]=10\in A\Rightarrow[\log_2 10]=3\in A\Rightarrow[\log_2 3]=1\in A$ (3p)

b) inductiv $2^n\in A$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ (2p); de aici $n=\left[\log_2 2^n\right]\in A$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ (2p)

CLASA a XI-a

SUBIECTUL 1

Soluţie: Din teorema cosinusului avem $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, deci

$c-2b\cos A=c-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{c}=\dfrac{a^2-b^2}{c}$. (2p)

Analog celelalte expresii şi determinantul devine $\Delta=\begin{vmatrix}-a & \dfrac{b^2-c^2}{a} & a\\ b & -b & \dfrac{c^2-a^2}{b}\\ \dfrac{a^2-b^2}{c} & c & -c\end{vmatrix}$ (2p)

Se calculează determinantul şi se obţine $\Delta=0$. (3p)

SUBIECTUL 2 Soluţie: a) Demonstrăm prin inducţie după n propoziţia $\forall n\in N^*, p(n):\exists x_n, y_n\in Z..a.i..A^n=x_nA+y_nI_2$.

Avem $p(1):\exists x_1, y_1 \in Z..a.i..A = x_1 A + y_1 I_2$ adevarata pentru $x_1 = 1, y_1 = 0$ (1p)

Din relaţia Cayley-Hamilton avem $A^2 = 4A + 5I_2$. (1p)

Presupunem $p(k)$ adevărată şi demonstrăm $p(k+1)$. Pentru aceasta calculăm $A^{k+1} = A^k \cdot A = (x_k A + y_k I_2)A = x_k A^2 + y_k A = x_k(4A + 5I_2) + y_k A = (4x_k + y_k)A + 5x_k I_2$. Deci există $x_{k+1} = 4x_k + y_k$, $y_{k+1} = 5x_k$, ambele din Z, astfel încât p(k+1) adevărată. (2p)

b) Înlocuind pe $y_k = 5x_{k-1}$ în prima recurenţă obţinem $x_{k+1} = 4x_k + 5x_{k-1}$. Folosind ecuaţia ataşată deducem $x_n = \frac{5^n - (-1)^n}{6}$, $y_n = \frac{5^n + 5(-1)^n}{6}$. Se deduce $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$. (3p)

SUBIECTUL 3 Soluţie: a) Calculăm $\frac{e_{n+1}}{e_n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} = \left(1 + \frac{-1}{n^2+2n+1}\right)^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \overset{Bernoulli}{\geq} \left(1 - \frac{n}{n^2+2n+1}\right) \cdot \frac{n+2}{n+1} > 1$, deci şirul $(e_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător. (2p)

Analog se demonstrează că şirul $(f_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător (1p)

b) Avem $e_n < e < f_n$ şi aplicând funcţia $\ln$ acestei inegalităţi se obţine concluzia. (2p)

c) Se calculează $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) < 0$ deci şirul este strict descrescător. Însumând inegalităţile de la punctul b) se deduce mărginirea, deci şi convergenţa. (2p)

SUBIECTUL 4.

Soluţie: Scoţând pe n factor comun forţat se obţine

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[3]{a + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}} - \sqrt{4 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}\right) = \infty \cdot (\sqrt[3]{a} - 2) = \begin{cases} \infty,..daca..a > 8 \\ -\infty,..daca..a < 8 \\ \infty \cdot 0,..daca..a = 8 \end{cases} \quad (4p)$$

Pentru a=8 avem $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{8n^3 + n^2 + 2n + 1} - 2n\right) + \left(2n - \sqrt{4n^2 - n + 2}\right) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$, după ce amplificăm fiecare diferenţă cu conjugate. (3p)

Notă: Fiecare subiect este notat cu 7p.

CLASA A XII-A

I. $\int \frac{\ln x - 1}{x^2 + \ln^2 x} dx = \int \frac{\frac{\ln x - 1}{x^2}}{1 + (\frac{\ln x}{x})^2} dx = -\int \frac{(\frac{\ln x}{x})'}{1 + (\frac{\ln x}{x})^2} dx = -arctg \frac{\ln x}{x} + C$.(7pct)

II.Se aplica de doua ori metoda integrarii prin parti si o teorema de medie:

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b x' f(x)dx = xf(x)|_a^b - \int_a^b xf'(x)dx = bf(b) - af(a) - \int_a^b (\frac{x^2}{2})' f'(x)dx = bf(b) - af(a) - \frac{x^2}{2} f'(x)|_a^b +$ $\int_a^b \frac{x^2}{2} f''(x)dx = bf(b) - af(a) - \frac{b^2}{2} f'(b) + \frac{a^2}{2} f'(a) + \int_a^b \frac{x^2}{2} f''(x)dx$.(cate 2 pct pentru fiecare integrare prin parti)

Comparand cu ipoteza $\Rightarrow \int_a^b \frac{x^2}{2} f''(x)dx = 0$.(1pct). Cu o teorema de medie $\Rightarrow \exists c \in (a,b)$ astfel

incat $\frac{c^2}{2} f''(c) = 0 \Rightarrow f''(c) = 0$.(2pct)

III. a) Presupunem ca $\forall x, y \in A$ avem $x \circ y \in A$; fie $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, $|A| = n$; fie $B = \{x_1 \circ x_1, x_1 \circ x_2, ..., x_1 \circ x_n\}$. Din ipoteza $B \subseteq A$; daca $x_1 \circ x_i = x_1 \circ x_j \mid stg x_1^{-1} \Rightarrow x_i = x_j$, contradictie cu $|A| = n$ deci $|B| = n; B \subseteq A \Rightarrow B = A$ (3pct); deci $\exists i \in \overline{1,n}$ astfel incat $x_1 \circ x_i = x_1 \Rightarrow x_1 = e$; $e \in A \subset G - H, e \in H$ este contradictie deci demonstratie incheiata.(1pct)

b) Presupunem ca $H_1 \not\subset H_2$ si $H_2 \not\subset H_1$. Fie $a \in H_1 - H_2, b \in H_2 - H_1$; din $a \in H_1, b \in G - H_1 \Rightarrow a \circ b \notin H_1$ iar din $b \in H_2, a \in G - H_2 \Rightarrow a \circ b \notin H_2$. (2pct) Dar $G = H_1 \cup H_2 \Rightarrow a \circ b \notin G$ contradictie (1pct).

IV. Pt.

$x \to 1 - x \Rightarrow f(1-x) \cdot F(x) = x^2 - 2x + 2 \Rightarrow f(x)F(1-x) - f(1-x)F(x) = 2x - 1 \Rightarrow (F(x)F(1-x))' = 2x - 1$

$F(x)F(1-x) = x^2 - x + c; F(x) > 0, \forall x \Rightarrow c > \frac{1}{4}$

(2pct)Din $F(x)F(1-x) = x^2 - x + c$, prin inmultire cu $f(x)$ avem $\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^2+1}{x^2 - x + c}$;

adica $\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{x^2+1}{x^2 - x + c}$ deci

$\ln F(x) = ... = x + \frac{1}{2}\ln(x^2 - x + c) + \frac{3-2c}{\sqrt{4c-1}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{4c-1}} + l, l \in R$ (3pct)

$F(x) = ke^x \sqrt{x^2 - x + c} \cdot e^{\frac{3-2c}{\sqrt{4c-1}} arctg \frac{2x-1}{\sqrt{4c-1}}}, k = e^l$ (2pct)