FUNCTII – proprietati

Paritate, imparitate

Multime simetrica: A se numeste **simetrica** daca $x \in A$, pentru $\forall x \in A$.

Functie para: f: $A \to \mathbf{R}$, A = multime simetrica

f **para**: daca f(-x) = f(x), $\forall x \in A$

Interpretare grafica: graficul unei functii pare este simetric fata de axa Ox

Functie impara: f: $A \to \mathbf{R}$**,** A = multime simetrica

f **impara** daca f(-x) = f(x), $\forall x \in A$

Interpretare grafica: graficul unei functii impare este simetric fata de origine.

Practic: se parcurg 2 etape:
1) domeniul de definitie = multime simetrica

2) $f(-x) = \begin{cases} f(x) \Rightarrow \text{f para} \\ -f(x) \Rightarrow \text{f impara} \\ \text{altfel} \Rightarrow \text{f nu e para, nu e impara} \end{cases}$

Monotonie f: $A \to \mathbf{R}$

f este **strict crescatoare** daca: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$

f este **strict descrescatoare** daca: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$

f este **crescatoare** daca: $x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$

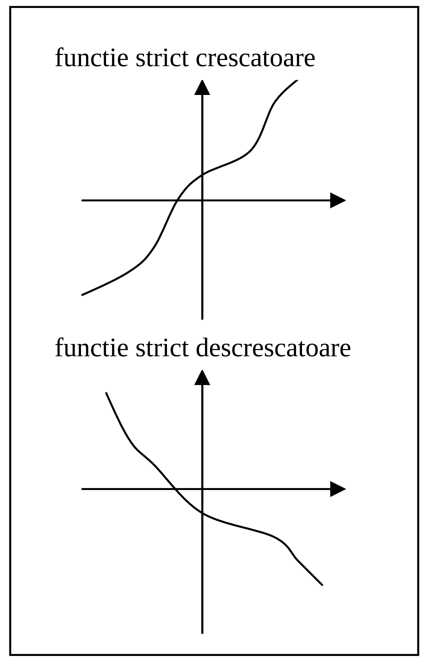
f este **descrescatoare** daca: $x_1 \le x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$

f este **strict monotona** daca f este strict crescatoare sau strict descrescatoare

f este **monotona** daca f este crescatoare sau descrescatoare

Raportul de variatie

pentru $x_1 \ne x_2$: $R(x_1 x_2) = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{f strict crescatoare} \\ < 0 \Rightarrow \text{f strict descrescatoare} \\ \ge 0 \Rightarrow \text{f crescatoare} \\ \le 0 \Rightarrow \text{f descrescatoare} \\ = 0 \Rightarrow \text{f constanta} \\ \text{altfel} \Rightarrow \text{f nu e monotona} \end{cases}$



Negarea monotoniei: pentru a demonstra ca f nu e monotona se cauta a, b, c $\in A$ astfel incat a < b < c si f(a) < f(b) > f(c) sau f(a) > f(b) < f(c).

Interpretare grafica: o functie crescatoare are o alura crescatoare in sensul cresterii lui x si o functie descrescatoare are o alura descrescatoare in sensul cresterii lui x.

Proprietati

1) f, g strict crescatoare (descrescatoare) $\Rightarrow$ f + g strict crescatoare (descrescatoare)

2) a > 0 si f strict crescatoare (descrescatoare) $\Rightarrow$ af strict crescatoare (descrescatoare)

a < 0 si f strict crescatoare (descrescatoare) $\Rightarrow$ af strict descrescatoare (crescatoare)

caz particular: f strict crescatoare $\Rightarrow$ - f strict descrescatoare

f strict descrescatoare $\Rightarrow$ - f strict descrescatoare

3) Daca f, g sunt pozitive si strict crescatoare (descrescatoare) $\Rightarrow$ $f \cdot g$ strict crescatoare (descrescatoare)

4) Daca f > 0 si f strict crescatoare (descrescatoare) $\Rightarrow \dfrac{1}{f}$ este strict descrescatoare (crescatoare)

5) („regula semnelor'') Daca f, g sunt crescatoare atunci $f \circ g$ este crescatoare

Daca f, g sunt descrescatoare atunci $f \circ g$ este crescatoare

Daca f si g au monotonii diferite $\Rightarrow$ $f \circ g$ este descrescatoare

6) Daca f este strict crescatoare si g este strict descrescatoare $\Rightarrow$ ecuatia f(x) = g(x) are cel mult o solutie.

Injectivitate: f: A $\to$ B

f **injectiva** daca: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \forall x_1, x_2 \in A$

Observatie: f injectiva: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in A$

practic: fie $x_1 x_2 \in A$ astfel incat $f(x_1) = f(x_2)$. Se demonstreaza ca $x_1 = x_2 \Rightarrow$ f injectiva.

Proprietati: f injectiva $\Leftrightarrow$ ecuatia f(x) = y are cel mult o solutie.

Interpretare grafica: f injectiva $\Leftrightarrow$ orice paralela la Ox taie graficul in cel mult un punct.

Noninjectivitate: se cauta x_1, x_2 astfel incat $x_1 \neq x_2$, dar $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Proprietati:

1) f strict monotona $\Rightarrow$ f injectiva.

2) f, g injectiva $\Rightarrow g \circ f$ injectiva

3) $g \circ f$ injectiva $\Rightarrow$ f injectiva.

Observatie: Orice functie are cel putin o restrictie injectiva.

Surjectivitate: f:A $\to$ B

f surjectiva daca pentru $\forall y \in B$, $\exists x \in A$ astfel incat f(x) = y

Proprietate: f surjectiva $\Leftrightarrow$ $\exists$mf = B

Practic: fie $y \in B$ astfel incat f(x) = y. Se afla x si se verifica $x \in A$. Atunci f este surjectiva.

Proprietate: f surjectiva $\Leftrightarrow$ ecuatia f(x) = y are cel putin o solutie in A.

Interpretare grafica: f surjectiva $\Leftrightarrow$ orice paralela la Ox, dusa prin codomeniu, taie graficul in cel putin un punct.

Nonsurjectivitate: Se demonstreaza ca Imf $\neq$ B sau se cauta $y \in B$ astfel incat $f(x) \neq y, \forall x \in A$.

Proprietati:

1) f, g surjective $\Rightarrow g \circ f$ surjectiva

2) $g \circ f$ surjectiva $\Rightarrow$ g surjectiva

Observatie: Orice functie are o singura corestrictie surjectiva.

Bijectivitate: f:A $\to$ B

f este bijectiva daca f este injectiva si surjectiva

Proprietate: f bijectiva $\Rightarrow$ ecuatia f(x) = y are solutie unica.

Interpretare grafica: f bijectiva $\Leftrightarrow$ orice paralela la Ox care trece prin codomeniu taie graficul intr-un unic punct.

Nonbijectivitate: se demonstreaza ca functia nu e bijectiva *sau* surjectiva.

Proprietate:

1) f, g bijectiva $\Rightarrow g \circ f$ bijectiva

2) $g \circ f$ surjectiva $\Rightarrow$ f injectiva si g surjectiva

Observatie: Orice functie poate fi restrictionata si corestrictionata la o functie bijectiva.