

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ  
ADOLF HAIMOVICI  
Etapa locală-februarie 2013  
Filiera tehnologică: profilul tehnic

Clasa XII

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție

$$x * y = 9xy - 3x - 3y + \frac{4}{3}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

- a) Să se demonstreze că  $\left(\left(\frac{1}{3}, +\infty\right), *\right)$  este grup comutativ.  
b) Să se găsească două numere  $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$  pentru care  $a * b = 2$ .

2. Pe mulțimea  $H = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  se definește legea de compoziție

$$x * y = \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ x + y, & x < y \leq 2, \forall x, y \in H. \\ y - x, & x \leq 3 \text{ și } y > 2 \end{cases}$$

- a) Să se alcătuiască tabla acestei legi.  
b) Să se calculeze de la stânga la dreapta, valoarea numărului  
 $1 * 2 * 3 * 4 * 3 * 2 * 1$

3. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$

- a) Să se calculeze  $\int_{-1}^3 |x| f(-1) \cdot f(3) dx$ .  
b) Să se determine cel mai mic număr natural  $m$  pentru care  
 $\int_{-1}^1 [f^2(1-x) - 4] dx < m$ .  
c) Să se arate că  $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{x-2}{f^2(x)-5} dx \in \mathbb{N}$

4. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ 2 + \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$

- a) Să se demonstreze că funcția admite primitive pe  $\mathbb{R}$ .  
b) Să se determine primitiva care se anulează în 0.

Notă: Timp de lucru 3 ore

Toate subiectele sunt obligatorii

Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.