CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală-9 februarie 2013
Filiera tehnologică: profilul tehnic

Clasa XI

1. Fie A,B,C,D $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât X+Y=XY, pentru orice $X, Y \in \{A, B, C, D\}$. Să se arate că 2(A+B+C+D)=ABCD.

2. Se consideră numerele reale a,b,c, funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 3$ și determinanții $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ și $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}$.
   a) Să se arate că A=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c).
   b) Să sa arate că A=B.
   c) Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, situate pe graficul funcției f, aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

3. Să se calculeze următoarele limite:
   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}$.
   b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4. Să se determine a,b,c numere reale astfel încât funcția $f : \mathbb{R} - \{-c\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x+c}$ să aibă ca asimptote dreptele de ecuații x=1 și y=x+2 iar punctul P(2,6) să fie un punct al graficului.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.