CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală-februarie 2013

Filiera teoretică: profilul științele naturii

Clasa XII

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție
   $x * y = 9xy - 3x - 3y + \frac{4}{3}, \forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
   a) Să se demonstreze că $\left(\left(\frac{1}{3}, +\infty\right), \ *\right)$ este grup comutativ.
   b) Să se găsească două numere $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ pentru care $a * b = 2$.

2. În mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale se consideră mulțimile $M = \{2^n | n\in\mathbb{Z}\}$ și $P = \{n^2 | n\in\mathbb{Z}\}$.
   a) Să se arate că operația de înmulțire a numerelor raționale determină pe mulțimea M o structură de grup comutativ.
   b) Să se demonstreze că produsul a patru elemente din mulțimea M care au exponenți naturali consecutivi este un element al mulțimii P.
   c) Să se arate că $M \cap P \neq \emptyset$.

3. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și funcția $f_{a,b}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_{a,b}(x) = a(x+1)^2 - bx^2$.
   a) Să se determine mulțimea primitivelor funției $f_{1,-1}(x)$.
   b) Să se calculeze $\int_{-1}^{1}\left[f_{1,1}(x) - f_{1,1}(-x)\right]dx$.
   c) Să se determine valoarea parametrului real a, știind că $\int_{-1}^{1} f_{a,a}^2(x)dx = 378$.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ 2 + \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$.
   a) Să se demonstreze că funcția admite primitive pe $\mathbb{R}$.
   b) Să se determine primitiva care se anulează în 0.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.