CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală-februarie 2013
Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protecția mediului

Clasa XII

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție
   $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3 - 1}, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
   a) Să se demonstreze că legea este asociativă pe $\mathbb{R}$.
   b) Să se detemine simetricul elementului $x = \sqrt[3]{10}$ în raport cu legea dată.
   c) Să se arate că numerele $a = (2 * 2)^3, b = (2 * 2 * 2)^3, c = (2 * 2 * 2 * 2)^3$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. În mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale se consideră mulțimile $M = \{2^n | n \in \mathbb{Z}\}$ și $P = \{n^2 | n \in \mathbb{Z}\}$.
   a) Să se arate că operația de înmulțire a numerelor raționale determină pe mulțimea M o structură de grup comutativ.
   b) Să se demonstreze că produsul a patru elemente din mulțimea M care au exponenți naturali consecutivi este un element al mulțimii P.
   c) Să se arate că $M \cap P \neq \emptyset$.

3. Se consideră funcțiile $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (ax^2 + b) \cdot e^x$ și $g(x) = (x + 1)^2 \cdot e^x$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.
   a) Să se determine a și b astfel încât f să fie o primitivă a funcției g.
   b) Știind că b=0, să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\int_0^1 f(x)dx = e - 2$.
   c) Considerând a=1, b=0, să se arate că $\int_1^2 \frac{g(x)}{f(x)} dx < 3 \left(\text{se poate folosi } \ln 2 < \frac{3}{4}\right)$.

4. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & x < 0 \\ 2 + \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$.
   a) Să se demonstreze că funcția admite primitive pe $\mathbb{R}$.
   b) Să se determine primitiva care se anulează în 0.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.