CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală-9 februarie 2013
Filiera teoretică: profilul științele naturii

Clasa XI

1. Fie A,B,C,D $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât X+Y=XY, pentru orice $X, Y \in \{A, B, C, D\}$. Să se arate că 2(A+B+C+D)=ABCD.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$,transpusa sa $A^t \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, matricea $B = A \cdot A^t$ și punctele $P_k(a_k, b_k)$, unde $k \in \{1,2,3\}$.
   a) Să se calculeze B în cazul $P_1(1,2), P_2(3,4), P_3(-3,-6)$.
   b) Să se arate că $\det B \geq 0$, oricare ar fi punctele P_1, P_2, P_3.
   c) Să se arate că , dacă detB=0 atunci punctele P_1, P_2, P_3 se găsesc pe o dreaptă ce trece prin originea axelor de coordonate.

3. Să se calculeze următoarele limite:
   a) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{2^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

   b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

4. Să se determine a,b,c numere reale astfel încât funcția $f : \mathbb{R} - \{-c\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+ax+b}{x+c}$ să aibă ca asimptote dreptele de ecuații x=1 și y=x+2 iar punctul P(2,6) să fie un punct al graficului.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.