CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
ADOLF HAIMOVICI
Etapa locală-februarie 2013

Filiera teoretică: profilul uman

Clasa XII

1. Se consideră matricea $X(a)=\begin{pmatrix}2a & a+1 & a+2\\ 0 & a-1 & a-2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, a\in\mathbb{R}$. Pentru o matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ se notează cu $S_1(A)$ suma elementelor din prima coloană, cu $S_2(A)$ suma elementelor din a doua coloană, cu $S_3(A)$ suma elementelor din a treia coloană și cu M mulțimea de matrice $M=\{A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})|S_1(A)=S_2(A)=S_3(A)\}$.
   a) Să se calculeze $X(1)-2I_3$.
   b) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât matricea $\begin{pmatrix}2a & -7 & 2\\ 2-2b & 2a-1 & 2\\ 3 & 3 & -5\end{pmatrix}$ să aparțină mulțimii M.
   c) Să se arate că oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, matricea $C=X(a)\cdot\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ aparține mulțimii M.

2. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.
   a) Să se calculeze A^{2013}.
   b) Să se calculeze $(2A+A^{-1})\cdot(A-2A^{-1})$.
   c) Să se determine matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A\cdot X\cdot A^{-1}=A+I_2$.

3. Fie sistemul de ecuații $\begin{cases}(2+a^2)x+y+z=1\\ x+(2+b^2)y+z=1\\ x+y+z=1\end{cases}$, $a,b\in\mathbb{R}$.
   a) Să se arate că $\det(A)\geq 1$, $\forall\ a,b\in\mathbb{R}$, unde A este matricea asociată sistemului.
   b) Pentru a=0, b=0 să se rezolve sistemul dat.

4. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -4 & -2\end{pmatrix}$ și $A=M+aI_2$, $a\in\mathbb{R}$
   a) Pentru a număr real nenul să se calculeze inversa matricei A.
   b) Să se calculeze $A^3-a^2(3M+aI_2)$.

Notă: Timp de lucru 3 ore
Toate subiectele sunt obligatorii
Fiecare subiect este notat de la 0 la 7.