OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A IX-A

SUBIECTELE

Problema 1. a) Un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ are proprietatea

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = 2^n + 1,$$

pentru orice $n \geq 1$. Stabiliţi dacă şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este progresie geometrică.

b) Fie A_1, A_2 două puncte distincte într-un plan. O lăcustă sare pe acest plan din A_1 în A_2, apoi continuă să sară, astfel încât lungimea fiecărei sărituri este de două ori mai mare decât cea precedentă. Poate să se întoarcă lăcusta vreodată în punctul A_1 ? (Justificare)

Problema 2. Să se determine mulţimile nevide $A \subset \mathbb{R}^*$ cu proprietăţile:
a) mulţimea A are cel mult cinci elemente;
b) $x \in A \Rightarrow \dfrac{1}{x} \in A$ şi $1 - x \in A$.

Problema 3. Să se determine cel mai mare număr natural n pentru care există numerele reale strict pozitive $x_1, x_2, ..., x_n$ astfel încât

$$x_1 + x_2 + ... + x_n = n$$

şi

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n} = \frac{4n-6}{n}.$$

Problema 4. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc de centru O. Notăm cu H_1, H_2, H_3, H_4 ortocentrele triunghiurilor ABC, BCD, CDA, respectiv DAB şi cu M, N mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$.

a) Să se arate că segmentele $[DH_1], [AH_2], [BH_3], [CH_4]$ au acelaşi mijloc P.

b) Să se arate că punctele O, P şi mijlocul segmentului $[MN]$ sunt coliniare.

Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu puncte de la 0 la 7
Timp de lucru: 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A IX-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Prelucrare prof. *Ovidiu Şontea*, Bucureşti

Detalii rezolvare	Barem asociat
a)$a_1 = S_1 = 3, a_2 = S_2 - S_1 = 5 - 3 = 2, a_3 = S_3 - S_2 = 9 - 5 = 4$	**1 punct**
$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3} \neq \frac{4}{2} = \frac{a_3}{a_2}$	**1 punct**
Şirul nu este progresie geometrică.	**1 punct**
b) Să presupunem că lungimea primei sărituri este s şi că după n sărituri se întoarce în punctul iniţial. Drumul parcurs de lăcustă va fi o linie frântă închisă $A_1A_2...A_nA_1$ cu segmentele de lungimi $s, 2s, 4s, ...2^{n-1}s$.	**1 punct**
Suma lungimilor primilor $n-1$ segmente este $s + 2s + 4s + ... + 2^{n-2}s = (2^{n-1} - 1)s$	**1 punct**
$2^{n-1}s = \mid \overrightarrow{A_nA_1} \mid = \mid \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \mid \leq \mid \overrightarrow{A_1A_2} \mid + ... + \mid \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \mid = (2^{n-1} - 1)s$. Fals.	**1 punct**
Nu poate.	**1 punct**

Subiectul 2. Prof. *Marcel Ţena*, Bucureşti

Detalii rezolvare	Barem asociat
Se observă că $1 \notin A$. Dacă $x \in A$ atunci $\frac{1}{x} \in A$ şi $1 - x \in A$. De aici $\frac{1}{1-x} \in A$, $1 - \frac{1}{x} \in A$ şi $1 - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{x-1} \in A$	**3 puncte**
Mulţimea căutată are cel mult cinci elemente, deci cel puţin două numere dintre cele 6 de mai sus sunt egale.	**1 punct**
Analizarea tuturor cazurilor posibile ce trebuie să fie îndeplinite pentru ca mulţimea să nu depăşească cinci elemente.	**2 puncte**
Mulţimea este $\left\{2, \frac{1}{2}, -1\right\}$	**1 punct**

Subiectul 3. Prelucrare Gazeta Matematică nr. 4/2012, prof. *Vasile Berghea*, Avrig

Detalii rezolvare	Barem asociat
Din inegalitatea Cauchy $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n} \geq \frac{n^2}{n + x_1 + x_2 + ... + x_n} = \frac{n}{2}$	**3 puncte**
Folosind relaţia din ipoteză obţinem $\frac{4n-6}{n} \geq \frac{n}{2}$	**1 punct**
$n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$	**1 punct**
$n_{\max} = 6$, întrucât pentru $x_1 = x_2 = ... = x_6 = 1$ se verifică relaţiile din enunţ	**2 puncte**

Subiectul 4.

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Luând originea în O, vectorii de poziţie verifică $\vec{r}_{H_1} = \vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C$ şi analoagele	**2 puncte**
$\frac{1}{2}(\vec{r}_{H_1} + \vec{r}_D) = \frac{1}{2}(\vec{r}_{H_2} + \vec{r}_A) = \frac{1}{2}(\vec{r}_{H_3} + \vec{r}_B) = \frac{1}{2}(\vec{r}_{H_4} + \vec{r}_C) = \vec{r}_P$	**2 puncte**
b) Mijlocul Q al lui $[MN]$ are vectorul de poziţie $\frac{1}{2}(\vec{r}_M + \vec{r}_N) = \frac{1}{4}(\vec{r}_A + \vec{r}_C + \vec{r}_B + \vec{r}_D)$	**1 punct**
Din $\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OQ}$ rezultă că O, P, Q sunt coliniare	**2 puncte**