OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A XII-A
SUBIECTELE

Problema 1. Să se calculeze
$$\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x^2+6}{x^4} \sin x \, \mathrm{d}x.$$

Problema 2. Fie $(G, \cdot)$ un grup abelian cu elementul neutru e. Pentru fiecare număr natural nenul n considerăm mulţimea $H_n = \{x \in G \mid x^n = e\}$. Să se arate că:

a) H_n este subgrup al lui G, oricare ar fi numărul natural nenul n.

b) Dacă pentru fiecare număr natural nenul n mulţimea H_n are cel mult n elemente, atunci subgrupurile finite ale lui G sunt mulţimile H_n, cu $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 3. Pentru un grup $(G, \cdot)$, notăm
$$Z(G) = \{a \in G \mid ax = xa, \forall x \in G\}.$$

a) Să se arate că, dacă $(G, \cdot)$ este un grup finit necomutativ, atunci
$$|Z(G)| \leq \frac{1}{4}\,|G|.$$

b) Să se dea exemplu de grup finit G pentru care $|Z(G)| = \dfrac{1}{4}\,|G|$.

Notă. $|M|$ reprezintă numărul elementelor mulţimii finite M.

Problema 4. a) Să se calculeze
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^n x}{\cos^{n-1} x} dx.$$

b) Se consideră funcţiile continue $f, g : [a, b] \to (0, \infty)$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Să se arate că şirul cu termenul general
$$c_n = \int_a^b f^n(x) g(x) dx, \quad n \geq 1$$
are limită.

Toate subiectele sunt obligatorii şi se notează cu puncte de la 0 la 7
Timp de lucru: 3 ore

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 –
CLASA A XII-A
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1. Prof. *Mihaela Berindeanu*, Bucureşti

Detalii rezolvare	Barem asociat
$\int_\pi^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\pi^{2\pi} \frac{1}{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x + 6\int_\pi^{2\pi}\frac{1}{x^4}\sin x\,\mathrm{d}x$	**1 punct**
$= \int_\pi^{2\pi}\frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_\pi^{2\pi}\left(\frac{1}{x^3}\right)'\sin x\,\mathrm{d}x = \int_\pi^{2\pi}\frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2\sin x}{x^3}\sin x\Big\vert_\pi^{2\pi} + 2\int_\pi^{2\pi}\frac{\cos x}{x^3}\,\mathrm{d}x =$	**3 puncte**
$= \int_\pi^{2\pi}\frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_\pi^{2\pi}\left(\frac{1}{x^2}\right)'\cos x\,\mathrm{d}x = \int_\pi^{2\pi}\frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\cos x}{x^2}\Big\vert_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi}\frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos x}{x^2}\Big\vert_\pi^{2\pi} =$ $= -\frac{5}{4\pi^2}$	**3 puncte**

Subiectul 2. Prof. *Marcel Ţena*, Bucureşti

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $x, y \in H_n$. Cum $(xy)^n = x^n y^n = e \cdot e = e$, rezultă că $xy \in H_n$	**2 puncte**
Dacă $x \in H_n$, atunci $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = e^{-1} = e$, deci $x^{-1} \in H_n$	**2 puncte**
b) Fie H un subgrup finit cu n elemente al lui G. Cum $x^n = e$, $\forall x \in H$, rezultă că $x \in H_n$, deci $H \subset H_n$	**2 puncte**
Deoarece $n = \lvert H\rvert \le \lvert H_n\rvert \le n$, rezultă $\lvert H_n\rvert = n$ şi $H = H_n$	**1 punct**

Subiectul 3. Gazeta Matematică nr. 10/2012, prof. *Marian Andronache*, Bucureşti

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) Fie $a \in G \setminus Z(G)$ şi $C(a) = \{x \in G \mid ax = xa\}$. Cum $C(a)$ este subgrup al lui G şi $C(a) \ne G$ (în caz contrar $a \in Z(G)$, fals), rezultă din teorema lui Lagrange că $\lvert C(a)\rvert \le \lvert G\rvert/2$	**3 puncte**
Deoarece $Z(G)$ este subgrup al lui $C(a)$ şi $Z(G) \ne C(a)$ (în caz contrar $a \in Z(G)$, fals), rezultă că $\lvert Z(G)\rvert \le \lvert C(a)\rvert/2$, deci $\lvert Z(G)\rvert \le \lvert G\rvert/4$	**2 puncte**
b) Fie grupul $G = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{1} & a & b \\ \hat{0} & \hat{1} & c \\ \hat{0} & \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$ cu $\lvert G\rvert = 8$	**1 punct**
Atunci $Z(G) = \{I_3, A\}$, unde A se obţine pentru $a = c = \hat{0}, b = \hat{1}$, deci $\lvert Z(G)\rvert = 2$.	**1 punct**

Subiectul 4. Prof. *Dan Marinescu*, Hunedoara

Detalii rezolvare	Barem asociat
a) $0 \le \int_0^{\pi/4}\frac{\sin^n x}{\cos^{n-1} x}dx = \int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^n x\cos x dx \le \int_0^{\pi/4}\mathrm{tg}^n x dx =$	**1 punct**
$= \int_0^1 \frac{t^n}{t^2+1}dt \le \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$, deci limita cerută este 0	**2 puncte**
b) Fie $M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ şi $P = \min\{g(x) \mid x \in [a,b]\}$. Dacă $M \in (0,1]$, atunci, pentru $n \ge 1$, $c_{n+1} - c_n = \int_a^b f^n(x)g(x)(f(x)-1)dx \le 0$, deci şirul este descrescător	**1 punct**
Cum $c_n \ge 0$, $n \ge 1$, rezultă că şirul este convergent	**1 punct**
Dacă $M > 1$, alegem $\alpha \in (1, M)$. Din continuitatea funcţiei f există $u, v \in [a,b]$, $u < v$, astfel încât $f(x) \ge \alpha$, $x \in [u,v]$.	**1 punct**
Atunci $c_n \ge \int_u^v f^n(x)g(x)dx \ge \alpha^n P(v-u)$, deci $\lim_{n\to\infty} c_n = \infty$	**1 punct**