FUNCTIA DE GRADUL AL DOILEA

1. DEFINIȚIA FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA. EXEMPLE

Definiție. Fiind date numerele reale, *a,b,c* **cu** $a \neq 0$**, funcția** f **:** $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ **definită prin formula:** $f(x) = ax^2 + bx + c$ **se numeşte** ***funcție de gradul al doilea cu coeficienții a, b, c.***

1) Deoarece domeniul şi codomeniul funcției de gradul al doilea este **R** vom indica această funcție astfel:

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ sau } y = ax^2 + bx + c$$

2) O funcție de gradul al doilea f : $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ este perfect determinată când se cunosc numerele reale a, b, c ($a \neq 0$).
3) Trebuie să observăm că în definiția funcției de gradul al doilea condiția $a \neq 0$ este esențială în sensul că ipoteza $a = 0$ conduce la funcția de gradul întâi, studiată în clasa a VIII-a.
4) Denumirea de funcție de gradul al doilea provine din faptul că este definită prin intermediul trinomului de gradul al doilea $aX^2 + bX + c$.

2. VARIAȚIA Şi REPREZENTAREA GRAFICĂ A FUNCȚIEI DE GRADUL AL DOILEA

- **Forma canonică**

Reamintim că pentru orice $x \in R$

$$ax^2 + bx + c = a[(x + b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2]$$

Rezultă că pentru orice $x \in R$, avem

$$f(x) = a[(x + b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2] \quad (1)$$

Membrul drept al egalității (1) se numeşte *forma canonică a funcției pătratice.* Numărul $\Delta = b^2 - 4ac$, discriminantul ecuației asociate ($ax^2 + bx + c = 0$), se mai numeşte *discriminantul funcției pătratice.*

Observăm că $f(-b/2a) = -\Delta/4a$

- **Maximul şi minimul**

În general, având în vedere forma canonică a funcției pătratice $f(x) = ax^2 + bx + c$ şi faptul că $f(-b/2a) = -\Delta/4a$, rezultă că pentru orice $x \in R$

$$f(x) - f(-b/2a) = a(x + b/2a)^2$$

Constatăm că semnul diferenței din membrul stâng depinde de semnul numărului a, deci pentru orice $x \in R$ avem:

- dacă $a > 0$, $f(x) \geq f(-b/2a)$, deci f admite un *minim* pe R;
- dacă $a < 0$, $f(x) \leq f(-b/2a)$, deci f admite un *maxim* pe R;

Fie funcția $f: R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

- Dacă $a > 0$, *minimul* funcției f pe R este $-\Delta/4a = f(-b/2a)$ iar *punctul de minim* este $-b/2a$.
- Dacă $a < 0$, *maximul* funcției f pe R este $-\Delta/4a = f(-b/2a)$ iar *punctul de maxim* este $-b/2a$.

- **Sensul de variație (intervalele de monotonie)**

Fie funcția $f: R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

- Dacă $a > 0$, atunci funcția f atinge *minimul* în punctul $-b/2a$ şi este: strict descrescătoare pe $(-\infty; -b/2a]$, strict crescătoare pe $[-b/2a; +\infty)$;
- Dacă $a < 0$, atunci funcția f atinge *maximul* în punctul $-b/2a$ şi este: strict crescătoare pe $(-\infty; -b/2a]$, strict descrescătoare pe $[-b/2a; +\infty)$.

- **Reprezentarea grafică a funcției pătratice**

Considerăm un reper în plan. Reprezentarea grafică a funcției $f: R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, adică mulțimea punctelor M (x, y) ale căror coordonate verifică relația $y = ax^2 + bx + c$, este o curbă numită *parabolă*. Vom nota această curbă prin X_f.

A. *Condiția ca un punct din plan să aparțină curbei X_f*

Fie M (p, q) un punct din plan. Punctul M (p, q) aparține curbei X_f dacă şi numai dacă $q = f(p)$, deci $q = ap^2 + bp + c$.

Dacă $q \neq ap^2 + bp + c$, atunci X_f nu trece prin M (p, q).

Punctul $V(-b/2a, -\Delta/4a)$ aparține curbei X_f pentru că $-\Delta/4a = f(-b/2a)$ şi se numeşte *vârful parabolei.*

B. *Axa de simetrie a curbei X_f*

Fie o funcție $f: R \to R$. Dreapta de ecuație $x = h$ este *axă de simetrie pentru curba reprezentativă a funcției f* dacă

$$f(h + x) = f(h - x),\ \forall\, x \in R.$$

Dacă are loc relația $f(-x) = f(x)$, $\forall\, x \in R$ (avem $h = 0$), atunci curba este simetrică în raport cu axa Oy şi f este o funcție *pară.*

Funcția pătratică $f: R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ verifică relația

$$f(-b/2a + x) = f(-b/2a - x),\ \forall\, x \in R.$$

ceea ce se poate demonstra direct sau utilizând forma canonică.

Curba reprezentativă a funcției $f: R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ admite ca *axă de simetrie* dreapta de ecuație $x = -b/2a$.

În particular, dacă b = 0, $f(x) = ax^2 + c$ este o funcție *pară.*

C. *Intersecția curbei X_f cu axele de coordonate*

Se știe că $Ox = \{(x, y) | x \in R, y = 0\}$, iar $Oy = \{(x, y) | x = 0, y \in R\}$.

Rezultă:

$M(x, y) \in X_f \cap Ox \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$ și $y = 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0$ și $y = 0$.

$M(x, y) \in X_f \cap Oy \Leftrightarrow y = ax^2 + bx + c$ și $x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ și $y = c$.

După cum $\Delta = b^2 - 4ac$ este strict pozitiv, nul sau strict negativ, ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are două soluții reale x_1 și x_2, o singură soluție reală $x = -b/2a$, respectiv nici o soluție reală.

În consecință:

- dacă $\Delta > 0$, $X_f \cap Ox = \{A(x_1, 0), B(x_2, 0)\}$;
- dacă $\Delta = 0$, $X_f \cap Ox = \{A(-b/2a, 0)\}$;
- dacă $\Delta < 0$, $X_f \cap Ox = \emptyset$.

De asemenea, reprezentarea grafică a oricărei funcții pătratice intersectează axa Oy, și anume

$$X_f \cap Oy = \{C(0, c)\}$$

Pentru c = 0, curba asociată funcției $f(x) = ax^2 + bx$ trece prin originea reperului.

- **Trasarea curbei reprezentative a unei funcții pătratice**

Pentru a reprezenta grafic o funcție pătratică $f: R \to R$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ adică pentru a trasa curba sa reprezentativă X_f, numită parabolă, se procedează după cum urmează.

1) Se determină și se înscriu într-un *tabel de variație* coordonatele unui număr finit de puncte ale curbei X_f, printre care este bine să se afle:
   - ✓ punctele de intersecție ale curbei cu axele reperului;
   - ✓ punctul $V(-b/2a, -\Delta/4a)$, vârful parabolei.
2) Se reprezintă aceste puncte într-un reper al planului, ales astfel încât să putem figura toate punctele.
3) Se unesc punctele reprezentate printr-o curbă continuă, ținând cont de:
   - ✓ Intervalele de monotonie ale funcției pătratice;
   - ✓ Simetria curbei X_f în raport cu dreapta de ecuație $x = -b/2a$.

Cu ajutorul curbei astfel obținute, putem obține o bună aproximare a coordonatelor oricărui punct al curbei X_f.

- **Semnul funcției pătratice**

I. Cazul $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$	semn a	0	semn contrar a	0	semn a	

II. Cazul $\Delta = 0$

x	$-\infty$ $-b/2a$ $+\infty$
$f(x)$	semn a 0 semn a

III. Cazul $\Delta < 0$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	semn a