

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -****CLASA A V-A**

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.**

1. Mama lui Ionel a cumpărat bulbi de ghiocei, de zambile și de lalele, cel puțin câte unul din fiecare fel de flori. Tatăl lui Ionel a mai cumpărat 3 bulbi de ghiocei, 6 bulbi de zambile, iar bulbi de lalele de 4 ori mai mulți decât a cumpărat mama. Ionel observă că numărul bulbilor de lalele este de trei ori mai mare decât numărul bulbilor de ghiocei și, în total, sunt 30 de bulbi de flori. Câți bulbi din fiecare fel de flori au cumpărat, în total, părinții lui Ionel?

2. Se consideră toate împărțirile posibile în care deîmpărțitul este cu 2013 mai mare decât restul.

a) Determinați numărul de valori pe care le poate lua deîmpărțitul;

b) Arătați că suma tuturor valorilor pe care le poate lua deîmpărțitul este divizibilă cu 2013.

3. Determinați câte numere naturale de forma \overline{xyz} au proprietatea că numărul $\overline{xyz} - \overline{xy} - z$ este cub perfect.

4. Se consideră mulțimile $A = \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{N}$ și $S = \{s \in \mathbb{N} \mid s = x + y, x \in A, y \in A, x \neq y\}$.

Se știe că $S = \{82, 96, 104, 112, 126\}$.

a) Calculați suma elementelor din mulțimea A;

b) Determinați elementele mulțimii A.



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -**

CLASA A V-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi.
Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

Subiectul 1.

Mama lui Ionel a cumpărat bulbi de ghiocei, de zambile și de lalele, cel puțin câte unul din fiecare fel de flori. Tatăl lui Ionel a mai cumpărat 3 bulbi de ghiocei, 6 bulbi de zambile, iar bulbi de lalele de 4 ori mai mulți decât a cumpărat mama. Ionel observă că numărul bulbilor de lalele este de trei ori mai mare decât numărul bulbilor de ghiocei și, în total, sunt 30 de bulbi de flori.

Câți bulbi din fiecare fel de flori au cumpărat, în total, părinții lui Ionel?

Prof. Victor Nicolae, Simion Petre, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
<p>Notăm cu g, z și respectiv l numărul de bulbi de ghiocei, zambile și de lalele cumpărați de mamă. Tatăl a cumpărat $4l$ bulbi de lalele. (Vezi figura alăturată!) Numărul total de bulbi de ghiocei este egal cu $g + 3$, numărul total de bulbi de zambile este egal cu $z + 6$, iar numărul total de bulbi de lalele este egal cu $5l$.</p>	
<p>Dar $5l = (g + 3) \cdot 3 = 3g + 9$, deci numărul total de bulbi de flori este $(g + 3) + (z + 6) + (3g + 9) = 30$. Prin urmare, $4g + z = 12$.</p>	2p
<p>Dar $5l = (g + 3) \cdot 3 = 3g + 9$, deci numărul total de bulbi de flori este $(g + 3) + (z + 6) + (3g + 9) = 30$. Prin urmare, $4g + z = 12$.</p>	1p
<p>Înseamnă că z se divide cu 4. Deoarece z nu este egal cu 0, rezultă că $z \in \{4; 8\}$</p>	1p
<p>Dacă $z = 8$, atunci $g = 1$ și numărul total de bulbi de lalele ar fi egal cu $5l = 3 \cdot 1 + 9 = 12$, fals.</p>	1p
<p>Deci $z = 4, g = 2$ și $5l = 3 \cdot 2 + 9 = 15$, adică $l = 3$</p>	1p
<p>Numărul total de bulbi de ghiocei este egal cu 5, numărul total de bulbi de zambile este egal cu 10, numărul total de bulbi de lalele este egal cu 15.</p>	1p

Subiectul 2.

Se consideră toate împărțirile posibile în care deîmpărțitul este cu 2013 mai mare decât restul.

- Determinați numărul de valori pe care le poate lua deîmpărțitul;
- Arătați că suma tuturor valorilor pe care le poate lua deîmpărțitul este divizibilă cu 2013.

Prof. Victor Nicolae, Simion Petre, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
<p>Notăm cu D, I, C și R, deîmpărțitul, împărțitorul, câtul și respectiv restul fiecărei împărțiri. Avem $D = C \cdot I + R$, $0 \leq R < I$ și $D = 2013 + R$, deci $I \cdot C = 2013$.</p>	2p

Deducem că $1 \leq I \leq 2013$.	
Prin urmare, $R \in \{0; 1; 2; \dots; 2012\}$.	2p
a) Rezultă că $D \in \{2013; 2014; \dots; 4025\}$, deci deîmpărțitul poate lua 2013 valori.	1p
b) $S = 2013 + (2013 + 1) + \dots + (2013 + 2012) = 2013^2 + 2012 \cdot 2013 : 2 = 2013 \cdot 3019$ care este număr divizibil cu 2013.	2p

Subiectul 3.

Determinați câte numere naturale de forma \overline{xyz} au proprietatea că numărul $\overline{xyz} - \overline{xy} - z$ este cub perfect.

Colecția Gazeta Matematică, seria B

Detalii rezolvare	Barem asociat
Avem $\overline{xyz} - \overline{xy} - z = 10 \cdot \overline{xy} + z - \overline{xy} - z = 9 \cdot \overline{xy}$.	1p
Deoarece $9 = 3^2$, rezultă că $\overline{xy} = 3^{3k+1} \cdot m^3 = 3 \cdot (3^k \cdot m)^3$, unde $k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}^*$.	2p
Cum $10 \leq \overline{xy} = 3 \cdot (3^k \cdot m)^3 \leq 99$, rezultă că $4 \leq (3^k \cdot m)^3 < 33$, deci $1 < 3^k \cdot m \leq 3$. Obținem $k = 0, m = 2$, cu $\overline{xy} = 24$ sau $k = 0, m = 3$ cu $\overline{xy} = 81$. Pentru $k = 0, m = 1$ avem $\overline{xy} = 81$.	3p
Avem $\overline{xyz} \in \{24z \mid z = \overline{0,9}\} \cup \{81z \mid z = \overline{0,9}\}$, în total 20 de numere.	1p

Subiectul 4.

Se consideră mulțimile $A = \{a, b, c, d\} \subset \mathbb{N}$ și $S = \{s \in \mathbb{N} \mid s = x + y, x \in A, y \in A, x \neq y\}$.

Se știe că $S = \{82, 96, 104, 112, 126\}$.

- a) Calculați suma elementelor din mulțimea A ;
b) Determinați elementele mulțimii A .

prof. Mircea Fianu, București

Detalii rezolvare	Barem asociat
Putem considera $a < b < c < d$.	1p
a) Atunci $a + b$ este cel mai mic număr din S , deci $a + b = 82$, iar $c + d$ este cel mai mare număr din S , deci $c + d = 126$.	1p
Suma elementelor din A este egală cu $(a + b) + (c + d) = 82 + 126 = 208$.	1p
b) Deoarece adunând elementele diferite din A două câte două obținem 6 sume, iar mulțimea S are 5 elemente înseamnă că două dintre cele 6 sume sunt egale.	1p
Cum $a + b < a + c < a + d$ și $b + c < b + d < c + d$, obținem $a + d = b + c = 104$, $a + c = 96$ și $b + d = 112$.	1p
În final, $a = 37, b = 45, c = 59, d = 67$.	2p