# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
## – ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -

## CLASA A VI-A

**Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 2 ore.**

**1.** Determinați numerele prime $p$ și $q$ ştiind că $\frac{p}{q}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, unde $a$ și $b$ sunt numere naturale nenule.

**2.** Determinați numerele $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi cifra $b$ astfel încât să aibă loc egalitatea $6^a+1=\overline{\underbrace{bb...b}_{n \text{ ori}}}$.

**3.** Se consideră numărul natural prim *p*. Numărul natural $n$ este divizibil cu $p^3$ dar nu este divizibil cu $p^4$. Numerele $d_1, d_2, ..., d_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, sunt divizorii numărului *n* şi $1=d_1<d_2<...<d_k=n$.

**a)** Determinați cea mai mică valoare posibilă a lui *k*;

**b)** Arătați că numărul $P=d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_k$ este pătrat perfect.

**4.** Se consideră numerele naturale nenule *m* şi *n* şi un unghi alungit $\widehat{A_0OA_{m+n}}$. De aceeaşi parte a dreptei $A_0A_{m+n}$ se consideră, în sensul mişcării acelor de ceasornic, semidreptele $(OA_1, (OA_2, ..., (OA_{m+n-1}$, care formează unghiurile $\widehat{A_0OA_1}, \widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3}, ..., \widehat{A_{m+n-1}OA_{m+n}}$.

Se ştie că un număr de *m* unghiuri dintre cele menționate au măsura egală cu $3^\circ$, iar celelalte *n* unghiuri au măsura egală cu $5^\circ$.

**a)** Determinați cea mai mică valoare a sumei $m+n$;

**b)** Dacă $m=5$, arătați că există $i, j \in \{0,1,2,...,m+n\}$ astfel încât $m\left(\widehat{A_iOA_j}\right)=30^\circ$.

Una dintre probleme a fost selectată din colecția ***Gazetei Matematice*-** Seria B, publicație lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de **Societatea de Științe Matematice din România**

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**
**– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -**

**CLASA A VI-A**

**SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE**

**Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.**

**Subiectul 1.**

Determinați numerele prime $p$ şi $q$ ştiind că $\frac{p}{q}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$, unde $a$ şi $b$ sunt numere naturale nenule.

*Prof.Lucian Petrescu, Tulcea*

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| Dacă $a=b$, rezultă $\frac{p}{q}=2$, deci $q=1$, contradicție.<br>Înseamnă că una dintre fracțiile $\frac{a}{b}$ şi $\frac{b}{a}$ este supraunitară, rezultă că $\frac{p}{q}>1$, deci $p>q$. | **1p** |
| Putem considera $(a;b)=1$, atunci $\frac{p}{q}=\frac{a^2+b^2}{ab}$.<br>Fracția $\frac{a^2+b^2}{ab}$ este ireductibilă, deci $q=ab$ şi $p=a^2+b^2$. Deducem că $a=1$ sau $b=1$. | **3p** |
| Dacă, de exemplu, $a=1$, obținem $q=b$ şi $p=b^2+1$. Cum $p$ şi $q$ au parități diferite şi $p>q$, rezultă $q=b=2$ şi $p=5$. Într-adevăr, $\frac{5}{2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{1}$. | **3p** |

**Subiectul 2.**

Determinați numerele $a\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}^*$ şi cifra $b$ astfel încât să aibă loc egalitatea $6^a+1=\underbrace{\overline{bb...b}}_{n \text{ ori}}$.

*Colecția Gazeta Matematică, Seria B*

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| Pentru $a=0$, obținem $b=2,\ n=1$. Pentru $a=1$, obținem $b=7,\ n=1$.<br>Pentru $a=\overline{2,4}$, nu avem soluții. Pentru $a=5$, obținem $b=7,\ n=4$ şi $6^5=7776$. | **4p** |
| Dacă $a\ge 6$, avem $b=7$. Numărul $6^a$ se divide cu $2^6$, dar numărul $\overline{...77776}$ nu se divide cu $2^6$, deci nu mai găsim soluții. | **3p** |

**Subiectul 3**.

Se consideră numărul natural prim $p$. Numărul natural $n$ este divizibil cu $p^3$ dar nu este divizibil cu $p^4$. Numerele $d_1, d_2, ..., d_k$, $k \in \mathbb{N}^*$, sunt divizorii numărului $n$ şi $1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n$.

**a)** Determinaţi cea mai mică valoare posibilă a lui $k$;

**b)** Arătaţi că numărul $P = d_1 \cdot d_2 \cdot ... \cdot d_k$ este pătrat perfect.

*Colecția Gazeta Matematică, Seria B, prelucrare*

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| **a)** Dacă descompunerea numărului $n$ în factori primi este $n = p^3 \cdot p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot ... \cdot p_m^{a_m}$, numărul de divizori ai lui $n$ este $k = 4 \cdot (a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot ... \cdot (a_m + 1)$. Cea mai mică valoare a lui $k$ este 4 şi se obține pentru $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$. | **3p** |
| **b)** Avem $d_i \cdot d_{k+1-i} = n,\ i = \overline{1,k}$, deci $P^2 = n^k$. Cum $k = 4q$, $q \in \mathbb{N}^*$, obținem $P^2 = n^{4q} = \left(n^{2q}\right)^2$. | **3p** |
| Deducem că $P = n^{2q} = \left(n^q\right)^2$, deci $P$ este pătrat perfect. | **1p** |

**Subiectul 4**.

Se consideră numerele naturale nenule $m$ şi $n$ şi un unghi alungit $\widehat{A_0OA_{m+n}}$. De aceeaşi parte a dreptei $A_0A_{m+n}$ se consideră, în sensul mişcării acelor de ceasornic, semidreptele $(OA_1$, $(OA_2$, ..., $(OA_{m+n-1}$, care formează unghiurile $\widehat{A_0OA_1}, \widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3}, ..., \widehat{A_{m+n-1}OA_{m+n}}$.

Se ştie că un număr de $m$ unghiuri dintre cele menționate au măsura egală cu $3^\circ$, iar celelalte $n$ unghiuri au măsura egală cu $5^\circ$.

**a)** Determinați cea mai mică valoare a sumei $m + n$;

**b)** Dacă $m = 5$, arătați că există $i, j \in \{0, 1, 2, ..., m+n\}$ astfel încât $m\left(\widehat{A_iOA_j}\right) = 30^\circ$.

*prof. Mircea Fianu, Bucureşti*

| **Detalii rezolvare** | **Barem asociat** |
|---|---|
| **a)** Avem $m \cdot 3^\circ + n \cdot 5^\circ = 180^\circ$. Deducem că $m$ este divizibil cu 5. Pentru ca numărul $m + n$ să fie minim trebuie ca $m$ să fie minim. | **2p** |
| Pentru $m = 5$, obținem $n = 33$, deci valoarea minimă a sumei $m + n$ este 38. | **1p** |
| **b)** Cele 5 unghiuri de $3^\circ$ determină cel mult 6 sectoare acoperite numai de unghiuri de $5^\circ$. | **2p** |
| Prin urmare, există un sector în care se află o secvență de cel puțin 6 unghiuri de $5^\circ$ alăturate. Rezultă concluzia. | **2p** |