OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -

CLASA A VII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. Se consideră triunghiul *ABC* în care $m\left(\widehat{C}\right)=2\cdot m\left(\widehat{A}\right)$ şi $AC=2\cdot BC$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*.

2. a) Determinați numerele naturale *a* care au proprietatea că $\left|a-\sqrt{2}\right|+\left|a-2\sqrt{2}\right|+\left|a-3\sqrt{2}\right|\in\mathbb{Q}$;

b) Demonstrați că numărul $N=\left|a-\sqrt{2}\right|+\left|a-2\sqrt{2}\right|+\left|a-3\sqrt{2}\right|+...+\left|a-2013\sqrt{2}\right|$ este irațional pentru orice număr rațional *a*.

3. Se consideră triunghiul *ABC* în care $m\left(\widehat{ABC}\right)=30^\circ$ şi $m\left(\widehat{ACB}\right)=15^\circ$. Punctul *M* este mijlocul laturii $[BC]$. Determinați măsura unghiului $\widehat{AMB}$.

4. Se consideră mulțimea $A=\left\{k\in\mathbb{N}\,\middle|\,501\leq k\leq 1000\right\}$. Pentru oricare element $k\in A$, notăm cu d_k cel mai mare divizor impar al numărului *k*.
Arătați că numărul $p=d_{501}+d_{502}+...+d_{1000}$ este pătrat perfect.

Una dintre probleme a fost selectată din colecția ***Gazetei Matematice-*** Seria B, publicație lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de
Societatea de Științe Matematice din România

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -

CLASA A VII-A

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

Se consideră triunghiul *ABC* în care $m\left(\widehat{C}\right)=2\cdot m\left(\widehat{A}\right)$ şi $AC=2\cdot BC$. Determinați măsurile unghiurilor triunghiului *ABC*.

colecția Gazeta Matematică, seria B

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Considerăm bisectoarea (*CD*, $D\in AB$, a unghiului $\widehat{C}$ şi punctul *M*, mijlocul segmentului [*AC*]. Triunghiul *DAC* este isoscel cu baza [*AC*], deci $DM\perp AC$.	**3p**
Triunghiurile *DMC* şi *DBC* sunt congruente (L.U.L.), deci $m\left(\widehat{DBC}\right)=m\left(\widehat{DMC}\right)=90^\circ$.	**3p**
Obținem $m\left(\widehat{A}\right)=30^\circ$ şi $m\left(\widehat{C}\right)=60^\circ$.	**1p**

Subiectul 2.

a) Determinați numerele naturale *a* care au proprietatea că $\left|a-\sqrt{2}\right|+\left|a-2\sqrt{2}\right|+\left|a-3\sqrt{2}\right|\in\mathbb{Q}$;

b) Demonstrați că numărul $N=\left|a-\sqrt{2}\right|+\left|a-2\sqrt{2}\right|+\left|a-3\sqrt{2}\right|+...+\left|a-2013\sqrt{2}\right|$ este irațional pentru orice număr rațional *a*.

Prof. Traian Preda, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Fie $\left|a-\sqrt{2}\right|+\left|a-2\sqrt{2}\right|+\left|a-3\sqrt{2}\right|=x\in\mathbb{Q}$. Avem $x\in\left\{\pm\left(a-\sqrt{2}\right)\pm\left(a-2\sqrt{2}\right)\pm\left(a-3\sqrt{2}\right)\mid a\in\mathbb{N}\right\}$. Numărul *x* este rațional dacă suma termenilor care conțin pe $\sqrt{2}$ este egală cu 0.	**2p**
Acest lucru se întâmplă dacă numerele $\left(a-\sqrt{2}\right)$ şi $\left(a-2\sqrt{2}\right)$ au semne contrare numărului $\left(a-3\sqrt{2}\right)$.	**1p**
Deducem că $2\sqrt{2}<a<3\sqrt{2}$, deci $a\in\{3;4\}$.	**1p**
b) $N\in\left\{\pm\left(a-\sqrt{2}\right)\pm\left(a-2\sqrt{2}\right)\pm...\pm\left(a-2013\sqrt{2}\right)\mid a\in\mathbb{Q}\right\}$, deci *N* poate fi scris	**1p**

$N = na + \sqrt{2}(\pm 1 \pm 2 \pm ... \pm 2013)$, unde $n \in \mathbb{Z}$.	
N este număr rațional dacă există o combinație de semne + sau – astfel încât numărul $A = \pm 1 \pm 2 \pm ... \pm 2013$ este egal cu 0.	**1p**
Dar numărul *A* este impar, deci nenul, pentru orice combinație de semne. Rezultă că numărul *N* este irațional.	**1p**

Subiectul 3.

Se consideră triunghiul *ABC* în care $m\left(\widehat{ABC}\right) = 30^\circ$ şi $m\left(\widehat{ACB}\right) = 15^\circ$. Punctul *M* este mijlocul laturii $[BC]$. Determinați măsura unghiului $\widehat{AMB}$.

***

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Considerăm semidreapta (*Cx* astfel încât semidreapta (*CA* este bisectoarea unghiului $\widehat{BCx}$. Fie $\{F\} = AB \cap (Cx$. Triunghiul *FBC* este isoscel cu baza [*BC*], deci $FM \perp BC$ şi $m\left(\widehat{BFM}\right) = m\left(\widehat{CMF}\right) = m\left(\widehat{BFx}\right) = 60^\circ$.	**3p**
Pentru triunghiul *CMF*, semidreapta (*CA* este bisectoare interioară, iar semidreapta (*FA* este bisectoare exterioară. Deducem că şi semidreapta (*MA* este bisectoare exterioară pentru triunghiul *CMF*.	**3p**
Rezultă că $m\left(\widehat{AMB}\right) = 45^\circ$.	**1p**

Subiectul 4.

Se consideră mulțimea $A = \{k \in \mathbb{N} \mid 501 \le k \le 1000\}$. Pentru oricare element $k \in A$, notăm cu d_k cel mai mare divizor impar al numărului *k*.

Arătați că numărul $p = d_{501} + d_{502} + ... + d_{1000}$ este pătrat perfect.

prof. Cristian Mangra, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Pentru orice număr natural *n* există, şi sunt unice, numerele $x \in \mathbb{N}$ şi *y* impar astfel încât $n = 2^x \cdot y$.	**2p**
Considerăm $i, j \in \{501; 502; ...; 1000\}$, $i < j$. Atunci $i = 2^{x_i} \cdot d_i$ şi $j = 2^{x_j} \cdot d_j$, unde d_i, d_j sunt numere naturale impare mai mici decât 1000. Dacă $d_i = d_j$, atunci $x_i < x_j$, echivalent cu $2i \le j \le 1000$, contrdicție.	**2p**
Deducem că $d_i \ne d_j$. Rezultă că $\{d_k \mid k \in A\} = \{1; 3; 5; ...; 999\}$.	**2p**
Deci $p = 1 + 3 + 5 + ... + 999 = 500^2$. Rezultă concluzia.	**1p**