OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -

CLASA A VIII-A

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete. Timp de lucru: 3 ore.

1. a) Arătaţi că $\left(\sqrt{2}-1,42\right)\cdot\left(\sqrt{12}-3,48\right)\cdot\left(\sqrt{6}-2,46\right)<0$;

b) Determinaţi cel mai mic număr natural *a* astfel încât, pentru oricare numere naturale distincte şi nenule *m*, *n* şi *p*, are loc inegalitatea $\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p}+\sqrt{mn}+\sqrt{np}+\sqrt{pm}<a\sqrt{mnp}$.

2. Se consideră expresia $E(x)=ax^2+bx+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$. Determinaţi numerele *a*, *b* şi *c* ştiind că $E(x)\in\mathbb{Q}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi $E(2013)=2013$.

3. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB=12$, $BC=9$ şi $AA'=4$. Determinaţi minimul sumei $MA+MB+MC+MD$, unde *M* este un punct variabil pe faţa $A'B'C'D'$.

4. a) Dacă *x*, *y* şi *z* sunt numere raţionale strict pozitive şi $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\in\mathbb{Q}$, arătaţi că $\sqrt{x},\sqrt{y}$ şi $\sqrt{z}$ sunt numere raţionale.

b) Se consideră numerele naturale nenule *a*, *b* şi *c* astfel încât numerele $x=(a+1)^2-4b$, $y=(b+1)^2-4c$ şi $z=(c+1)^2-4a$ sunt naturale nenule. Dacă $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2013$, determinaţi numerele *a*, *b* şi *c*.

Una dintre probleme a fost selectată din colecţia ***Gazetei Matematice***- Seria B, publicaţie lunară pentru tineret, fondată în anul 1895, editată de
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
– ETAPA PE SECTOR, 09.02.2013 -

CLASA A VIII-A

SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Subiectul 1.

a) Arătați că $\left(\sqrt{2}-1,42\right)\cdot\left(\sqrt{12}-3,48\right)\cdot\left(\sqrt{6}-2,46\right)<0$;

b) Determinați cel mai mic număr natural *a* astfel încât, pentru oricare numere naturale distincte şi nenule *m, n* şi *p*, are loc inegalitatea $\sqrt{m}+\sqrt{n}+\sqrt{p}+\sqrt{mn}+\sqrt{np}+\sqrt{pm}<a\sqrt{mnp}$.

Colecția Gazeta Matematică, seria B

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Se aproximează numerele $\sqrt{2},\sqrt{6}$ şi $\sqrt{12}$ cu eroare de o sutime prin adaos şi se constată că toți factorii produsului sunt negativi.	**3p**
b) Împărțim ambii membri ai inegalității din enunț cu $\sqrt{mnp}$ și obținem inegalitatea echivalentă $\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{mn}}+\frac{1}{\sqrt{np}}+\frac{1}{\sqrt{pm}}<a$.	**2p**
Putem presupune că $m\geq 1, n\geq 2, p\geq 3$, deci $\frac{1}{\sqrt{m}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{p}}+\frac{1}{\sqrt{mn}}+\frac{1}{\sqrt{np}}+\frac{1}{\sqrt{pm}}\leq 1+\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{6}$.	**1p**
Deoarece $3<1+\sqrt{2}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{6}}{6}<1+1,42+1,16+0,41=3,99<4$, rezultă $a=4$.	**1p**

Subiectul 2.

Se consideră expresia $E(x)=ax^2+bx+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R}$. Determinați numerele *a, b* şi *c* ştiind că $E(x)\in\mathbb{Q}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ şi $E(2013)=2013$.

Prof.Cosmin Nițu, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
$E\left(\sqrt{2}\right)=2a+b\sqrt{2}+c$ şi $E\left(-\sqrt{2}\right)=2a-b\sqrt{2}+c$, deci $E\left(\sqrt{2}\right)-E\left(-\sqrt{2}\right)=2b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, deci $b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. Analog, $b\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$. Dacă $b\neq 0$, obținem $\frac{b\sqrt{3}}{b\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\in\mathbb{Q}$, fals. Deci $b=0$.	**3p**
$E\left(2\sqrt{2}\right)=8a+c$ şi $E\left(2\sqrt{2}\right)-4\cdot E\left(2\right)=-3c\in\mathbb{Q}$, deci $c\in\mathbb{Q}$ şi $a\in\mathbb{Q}$.	**2p**

Cum $E\left(\sqrt{2}+1\right)=3a+c+2a\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$, rezultă $a\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$. Deoarece $a\in\mathbb{Q}$, obținem $a=0$.	**1p**
Cum $E(2013)=c$, rezultă $c=2013$.	**1p**

Subiectul 3.
Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB=12$, $BC=9$ şi $AA'=4$. Determinați minimul sumei $MA+MB+MC+MD$, unde M este un punct variabil pe fața $A'B'C'D'$.

Prof. Cosmin Nițu , Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
Fie A'', B'', C'', D'' simetricele punctelor A, B, C, D față de A', B', C', D'. În triunghiul MAA'', MA' este mediană şi înălțime, deci triunghiul este isoscel. Prin urmare, $MA=MA''$ şi, analog, $MB=MB''$, $MC=MC''$ şi $MD=MD''$.	**2p**
Avem $MA+MB+MC+MD=\frac{1}{2}\left(MA+MB+MC+MD+MA''+MB''+MC''+MD''\right)$.	**1p**
$MA+MB+MC+MD=\frac{1}{2}\left[\left(MA+MC''\right)+\left(MA''+MC\right)+\left(MB+MD''\right)+\left(MB''+MD\right)\right]$	**1p**
Avem $MA+MC''\geq AC''$, $MC+MA''\geq A''C$, $MB+MD''\geq BD''$; $MB''+MD\geq DB''$. Egalitățile au loc atunci când $M\in AC''$, etc. Deoarece $AC''=A''C=BD''=B''D=17$, rezultă că $MA+MB+MC+MD\geq 34$.	**2p**
Deoarece dreptele $AC'', C''A, BD'', B''D$ sunt concurente în punctul O', centrul feței $A'B'C'D'$, egalitatea se obține pentru $M=O'$.	**1p**

Subiectul 4.
a) Dacă x, y şi z sunt numere raționale strict pozitive şi $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\in\mathbb{Q}$, arătați că $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ şi $\sqrt{z}$ sunt numere raționale.
b) Se consideră numerele naturale nenule a, b şi c astfel încât numerele $x=(a+1)^2-4b$, $y=(b+1)^2-4c$ şi $z=(c+1)^2-4a$ sunt naturale nenule. Dacă $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=2013$, determinați numerele a, b şi c.

prof. Crisian Mangra, Bucureşti, prof. Lucian Petrescu, Tulcea, prof. Mircea Fianu, Bucureşti

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a) Notăm $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=p\in\mathbb{Q}_+$, deci $\sqrt{x}+\sqrt{y}=p-\sqrt{z}$. Prin ridicare la pătrat, relația este echivalentă cu $\sqrt{xy}=r-p\sqrt{z}$ (1), unde $r=\frac{p^2+z-x-y}{2}\in\mathbb{Q}$.	**2p**
Dacă $r=0$, atunci $\sqrt{xy}=-p\sqrt{z}<0$, fals.	**1p**
Ridicând relația (1) la pătrat, se obține $2pr\sqrt{z}\in\mathbb{Q}$, deci $\sqrt{z}\in\mathbb{Q}$. Analog, $\sqrt{x}, \sqrt{y}\in\mathbb{Q}$.	**1p**
b) Cum 2013 este număr rațional, conform **a)** obținem că x, y, z sunt pătrate perfecte. Deoarece $(a+1)^2$ şi $(a+1)^2-4b$ sunt pătrate perfecte de aceeaşi paritate, deducem că $(a+1)^2-4b\leq(a-1)^2$, de unde $4a\leq 4b$. Procedând analog obținem $a\leq b\leq c\leq a$. Prin urmare, $a=b=c$.	**2p**
Deducem că $x=y=z=(a-1)^2$. Avem $3\lvert a-1\rvert=2013$, de unde $a=b=c=672$.	**1p**