



**SIMULAREA PROBEI DE MATEMATICĂ DIN CADRUL  
EXAMENULUI DE BACALAUREAT 2013 LA NIVELUL MUNICIPIULUI BUCUREȘTI  
01 FEBRUARIE 2013**

**SUBIECT**

***M\_mate-info*** pentru filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică și pentru filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.

**Minden tétel kötelező jellegű. Hivatalból jár 10 pont. A megoldáshoz 3 óra áll rendelkezésre.**

**A vizsgalapra a teljes megoldást kell ráírni.**

**I TÉTEL**

**(30 pont)**

- 5p 1. Oldjátok meg a valós számok halmazán az  $|x-1|=2x-5$  egyenletet.
- 5p 2. Oldjátok meg az  $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$  egyenlőtlenséget a valós számok halmazán.
- 5p 3. Határozzátok meg azt a  $z$  komplex számot, amely rendelkezik a  $z+2\bar{z}=6+i$  tulajdonsággal.
- 5p 4. Állapítsátok meg az  $\{1,2,3,4,5,6\}$  halmaz azon részhalmazainak a számát, amelyek nem tartalmazzák az 1 elemet.
- 5p 5. Határozzátok meg a  $\sin x + \cos x = 0$  egyenlet  $(0, 2\pi)$  intervallumnak megfelelő megoldásait.
- 5p 6. Az  $xOy$  kártézi koordinátarendszerben, határozzátok meg a kezdőpontnak az  $x-2y-1=0$  egyeneshez viszonyított szimmetrikusának a koordinátáit.

**II TÉTEL**

**(30 pont)**

1. Az  $M_2(\mathbb{R})$  halmazban tekintsük az  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  mátrixot.
- 5p a) Határozzátok meg az  $A^2 - 5A + 6I_2$  mátrix elemeinek az összegét.
- 5p b) Mutassátok ki, hogy bármely  $n \geq 1$  szám esetén, létezik egy  $x_n$  természetes szám, amelyre  $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & x_n \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$ .
- 5p c) Az előző pontban meghatározott  $x_n$  számokra, bizonyítsátok be, hogy  $x_n$  akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha  $n$  páros szám.
2. Legyen  $a \in \mathbb{Z}$  és az egész számok halmazán megadott „ $\circ$ ” művelet, a következő törvényszerűséggel:  
$$x \circ y = axy + (a+1)(x+y+1), \text{ bármely } x, y \in \mathbb{Z}.$$
- 5p a) Bizonyítsátok be, hogy az adott művelet asszociatív.
- 5p b) Mutassátok ki, hogy az „ $\circ$ ” művelet semleges eleme  $-1$ .
- 5p c) Határozzátok meg,  $a = -2$  esetében azokat az elemeket, amelyeknek az adott művelethez viszonyítva van szimmetrikus elemük.

**III TÉTEL**

**(30 pont)**

1. Tekintsük az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  függvényt és azt az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozatot amelyet az  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = f(x_n)$  kifejezések határoznak meg.
- 5p a) Számítsátok ki az  $f$  függvény deriváltját.
- 5p b) Állapítsátok meg az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat monotonitását.
- 5p c) Mutassátok ki, hogy  $f(x+e) - f(x) \leq e$ , bármely  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Tekintsük az  $f_0: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_0(x) = \arctg x$  és  $f_n: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) = x^n \arctg x$ , függvényeket,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p a) Mutassátok ki, hogy az  $F: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = f_0(x) + f_2(x) - x$  függvény a  $2f_1$  függvénynek egy primitív függvénye.
- 5p b) Bizonyítsátok be, hogy az  $(I_n)_{n \geq 0}$ ,  $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$  sorozat határértéke 0.
- 5p c) Ellenőrizték, hogy  $(n+1) \int_0^1 f_n(x) dx + (n-1) \int_0^1 f_{n-2}(x) dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ , bármely  $n \geq 2$  esetén.

SIMULARE BACALAUREAT 2013