

**CONCURSUL CĂLIN BURDUȘEL****EDIȚIA a II-a, 26 ianuarie 2013****Problema 1**Fie mulțimile  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 7n+11 \vdots 13\}$  și  $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 11n+7 \vdots 13\}$ . Arătați că:

- a)  $n \in A$  dacă și numai dacă  $n-4 \vdots 13$
- b)  $n \in B$  dacă și numai dacă  $n-10 \vdots 13$
- c)  $A \cap B = \emptyset$

Călin Burdușel

**Problema 2**Fie  $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$  astfel încât numerele :  $\frac{a^3}{bcd}, \frac{b^3}{cda}, \frac{c^3}{dab}, \frac{d^3}{abc}$  sunt naturale.

Demonstrați că:

- a)  $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$
- b)  $a^{2012} + b^{2012} + c^{2012} + d^{2012} = 4(abcd)^{503}$
- c)  $a^{2013} + b^{2013} + c^{2013} + d^{2013} = (abcd)^{503}(a + b + c + d)$

Călin Burdușel

**Problema 3**Fie paralelogramul ABCD și punctele:  $M \in (AB)$ ;  $N \in (BC)$  și fie  $\{P\} = AN \cap CM$ .Demonstrați ca DP este bisectoarea unghiului  $\widehat{ADC}$  dacă și numai dacă  $AM = CN$ .

Călin Burdușel

**Notă:** Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 90 minute

1) a)  $n \in A \rightarrow (\exists) k \in \mathbb{N}$ , ai  $7n + 11 = 13k \rightarrow 7n - 28 + 28 + 11 = 7(n-4) + 39 = 13k \rightarrow 13 | n-4 \rightarrow n-4 : 13$   
(1,5p)

reciproc: daca  $n-4 : 13$ ,  $(\exists) k \in \mathbb{N} \rightarrow n-4=13k \rightarrow n=13k+4 \rightarrow 7n+11 = 91k+39 = 13(7k+3) \rightarrow 7n+11 : 13 \rightarrow n \in A$  (1,5p)

b)  $n \in B \rightarrow (\exists) k \in \mathbb{N}$ , ai  $11n + 7 = 13k \rightarrow 11n - 110 + 110 + 7 = 13k \rightarrow 11(n-10) + 117 = 13k \rightarrow 13 | n-10 \rightarrow n-10 : 13$  (1,5p) reciproc daca  $n-10 : 13 \rightarrow (\exists) k \in \mathbb{N}$  ai  $n-10 = 13k \rightarrow n=13k+10 \rightarrow 11n+7=143k+117=13(11k+9) \rightarrow 11n+7 : 13 \rightarrow n \in B$  (1,5p)

c)  $n \in A \xrightarrow{a,b} n=13k+4$ ,  $n \in B \xrightarrow{a,b} n=13l+10$ ,  $n \in \mathbb{N}$  (1,5p)

Daca  $n \in A \cap B \rightarrow (\exists) k, l \in \mathbb{N}$  ai  $13l+10=13k+4 \rightarrow 13l=13k-6$  Fals intrucat 13 nu divide 6 (1,5p)

2) a) Produsul celor 4 numere este 1 ... (1,5p)

fiecare numar este 1 (1,5p)

$a^3 = bcd$ , deci  $a^4 = abcd$  si analoagele (1 p)

$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = 4abcd$  (1 p)

b)  $a^{2012} = (a^4)^{503} = (abcd)^{503}$  si analoagele (1 p)

$a^{2012} + b^{2012} + c^{2012} + d^{2012} = 4(abcd)^{503}$  (1 p)

c)  $a^{2013} = a^{2012} \cdot a = (abcd)^{503} \cdot a$  si analoagele (1 p)

$a^{2013} + b^{2013} + c^{2013} + d^{2013} = (abcd)^{503}(a + b + c + d)$  (1 p)

3) Fie Q, R, S, T picioarele perpendicularelor din P pe CD, DA, AB, BC (2 p)

$2S_{APC} = 2S_{AMC} - 2S_{APM} = AM \cdot QS - AM \cdot PS = AM \cdot PQ$  (2 p)

si  $2S_{APC} = 2S_{ANC} - 2S_{PNC} = CN \cdot RT - CN \cdot PT = CN \cdot PR$  (2 p)

Deci  $AM \cdot PQ = CN \cdot PR$  (1,5p)

DP este bisectoarea unghiului ADC daca si numai daca  $AM=CN$  (1,5p)

