FIŞĂ DE PERFORMANŢĂ PENTRU CLASA a VII-a

TEOREME CELEBRE DE GEOMETRIE PLANĂ. SETUL 1

✎ *prof. Marius Damian, Brăila*

1. Teorema lui Menelaus. Fie triunghiul ABC şi punctele $M,\ N,\ P$ situate pe dreptele $BC,\ CA$, respectiv AB, diferite de vârfurile $A,\ B,\ C$.

Dacă punctele $M,\ N,\ P$ sunt coliniare, atunci are loc relaţia:

$$\frac{MB}{MC}\cdot\frac{NC}{NA}\cdot\frac{PA}{PB}=1. \tag{1}$$

Demonstraţie. Există două situaţii posibile:

- două din punctele $M,\ N,\ P$ se află pe laturile triunghiului, iar al treilea pe prelungirea celei de-a treia laturi (**Figura 1-a**);
- toate cele trei puncte $M,\ N,\ P$ se află pe prelungirile laturilor triunghiului (**Figura 1-b**).

Ne ocupăm, în continuare, numai de prima situaţie; cea de-a doua se tratează analog.

Construim $CS \parallel BA,\ S \in MP$.

În triunghiul MBP, cu $CS \parallel BP$, conform teoremei fundamentale a asemănării, avem:

$$\triangle MBP \sim \triangle MCS \Rightarrow \frac{MB}{MC}=\frac{PB}{CS}.$$

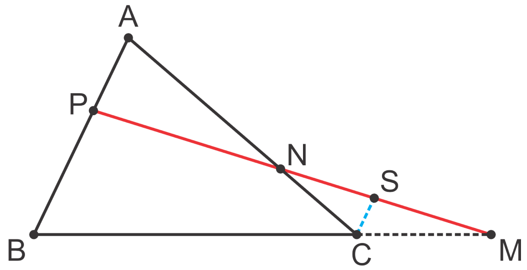

Figura 1-a

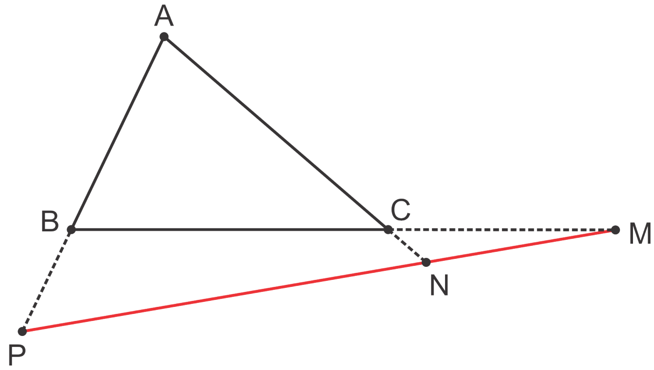

Figura 1-b

Aplicând aceeaşi teoremă în triunghiul CNS, cu $CS \parallel AP$, obţinem:

$$\triangle CNS \sim \triangle ANP \Rightarrow \frac{NC}{NA} = \frac{CS}{AP}.$$

Înmulţind membru cu membru egalităţile de mai sus, deducem:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} = \frac{PB}{CS} \cdot \frac{CS}{AP} = \frac{PB}{AP},$$

care conduce imediat la relaţia (1). ■

Punctele coliniare $M,\ N,\ P$ din teorema precedentă se numesc **noduri**, iar dreapta determinată de ele se numeşte **transversală** şi se notează cu $M - N - P$.

2. Reciproca teoremei lui Menelaus. Fie triunghiul ABC şi punctele $M,\ N,\ P$ situate pe dreptele $BC,\ CA$, respectiv AB, diferite de vârfurile $A,\ B,\ C$.

Dacă $\dfrac{MB}{MC} \cdot \dfrac{NC}{NA} \cdot \dfrac{PA}{PB} = 1$, atunci punctele $M,\ N,\ P$ sunt coliniare.

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că punctele $M,\ N,\ P$ nu sunt coliniare. Atunci există punctul $M' \in BC$, astfel încât $M',\ N,\ P$ să fie coliniare (**Figura 2**).

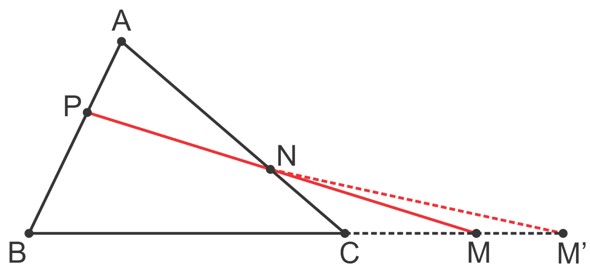

Figura 2

Aplicând acum **teorema 1** în triunghiul ABC cu transversala $M' - N - P$, deducem că:

$$\frac{M'B}{M'C} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1.$$

Totodată, din ipoteză, avem

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1.$$

Ultimele două egalităţi conduc la:

$$\frac{M'B}{M'C} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow \frac{M'B}{M'B - M'C} = \frac{MB}{MB - MC} \Rightarrow \frac{M'B}{BC} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow M'B = MB,$$

de unde rezultă că $M = M'$, în contradicţie cu presupunerea făcută.

În concluzie, punctele $M,\ N,\ P$ sunt coliniare. ■

3. Teorema transversalei. Fie triunghiul ABC şi punctele $D \in (BC),\ M \in (AB),\ N \in (AC)$ şi $\{P\} = MN \cap AD$. Atunci are loc relaţia:

$$\frac{PD}{PA} \cdot BC = \frac{MB}{MA} \cdot DC + \frac{NC}{NA} \cdot DB. \tag{2}$$

Demonstraţie. Tratăm doar cazul $MN \nparallel BC$. Cazul $MN \parallel BC$ este banal şi rămâne ca exerciţiu. Construim $d \parallel BC,\ A \in d$ şi fie $\{X\} = MN \cap BC$ şi $\{Y\} = MN \cap d$ (**Figura 3**).

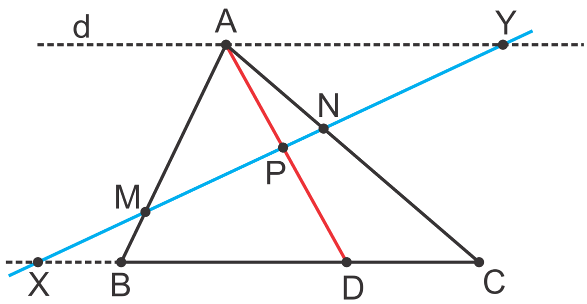

Figura 3

Din $d \parallel BC$, conform teoremei fundamentale a asemănării, avem:

$$\triangle BMX \sim \triangle AMY \Rightarrow \frac{MB}{MA} = \frac{BX}{AY}, \quad \triangle CNX \sim \triangle ANY \Rightarrow \frac{NC}{NA} = \frac{CX}{AY}$$

şi

$$\triangle DPX \sim \triangle APY \Rightarrow \frac{PD}{PA} = \frac{DX}{AY}.$$

În final

$$\begin{aligned}\underline{\frac{MB}{MA} \cdot DC + \frac{NC}{NA} \cdot DB} &= \frac{BX}{AY} \cdot DC + \frac{CX}{AY} \cdot DB = \frac{1}{AY} \cdot (BX \cdot DC + CX \cdot DB) = \\ &= \frac{1}{AY} \cdot [(DX - DB) \cdot DC + (DX + DC) \cdot DB] = \\ &= \frac{1}{AY} \cdot (DX \cdot DC + DX \cdot DB) = \frac{DX}{AY} \cdot (DC + DB) = \\ &= \frac{DX}{AY} \cdot BC = \underline{\frac{PD}{PA} \cdot BC}. \quad ■\end{aligned}$$

Observaţie. Dacă punctul P din teorema de mai sus devine G (centrul de greutate), atunci relaţia (2) devine

$$\frac{MB}{MA} + \frac{NC}{NA} = 1,$$

iar dacă P devine I (centrul cercului înscris), relaţia (2) se scrie

$$\frac{MB}{MA} \cdot AC + \frac{NC}{NA} \cdot AB = BC.$$

4. Teorema lui Ceva. Fie triunghiul ABC şi punctele $M,\ N,\ P$ situate pe dreptele $BC,\ CA$, respectiv AB, diferite de vârfurile $A,\ B,\ C$.

Dacă dreptele $AM,\ BN,\ CP$ sunt concurente, atunci are loc relaţia:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1. \tag{3}$$

Demonstraţie. Există două situaţii posibile:

- puncte $M,\ N,\ P$ se află, fiecare, pe câte o latură a triunghiului (**Figura 4-a**);
- două din punctele $M,\ N,\ P$ se află pe prelungirile laturilor triunghiului, iar al treilea pe cea de-a treia latură (**Figura 4-b**).

Ne ocupăm, în continuare, numai de prima situaţie; cea de-a doua se tratează analog.

Fie $\{O\} = AM \cap BN \cap CP$.

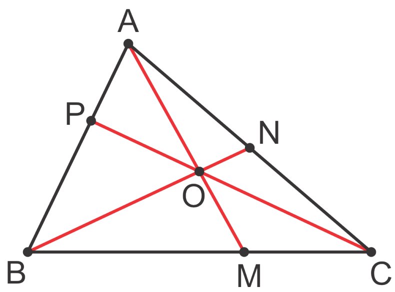

Figura 4-a

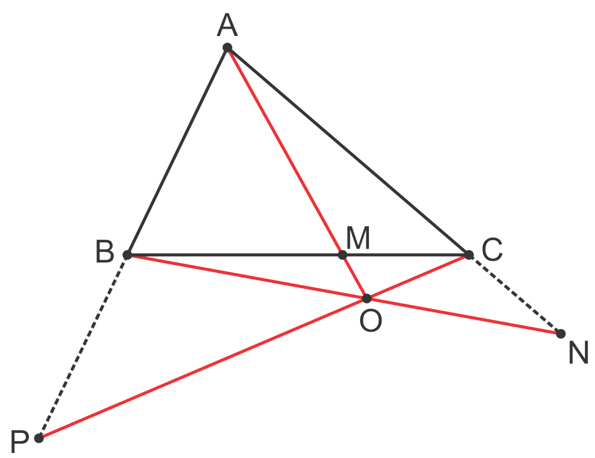

Figura 4-b

Aplicăm teorema lui Menelaus, în triunghiul ABM cu transversala $C - O - P$ şi rezultă:

$$\frac{CB}{CM} \cdot \frac{OM}{OA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1,$$

apoi în triunghiul ACM cu transversala $B - O - N$ şi obţinem:

$$\frac{BC}{BM} \cdot \frac{OM}{OA} \cdot \frac{NA}{NC} = 1.$$

Egalităţile precedente conduc la

$$\frac{1}{CM} \cdot \frac{PA}{PB} = \frac{1}{BM} \cdot \frac{NA}{NC} \Rightarrow \frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1,$$

adică am obţinut relaţia (3). ■

5. Reciproca teoremei lui Ceva. Fie triunghiul ABC şi punctele $M,\ N,\ P$ situate pe dreptele $BC,\ CA$, respectiv AB, diferite de vârfurile $A,\ B,\ C$.

Dacă $\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$, atunci dreptele $AM,\ BN,\ CP$ sunt concurente.

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că dreptele $AM,\ BN,\ CP$ nu sunt concurente. Atunci există punctul $M' \in BC$, astfel încât dreptele $AM,\ BN,\ CP$ să fie concurente într-un punct pe care îl notăm cu O (**Figura 5**).

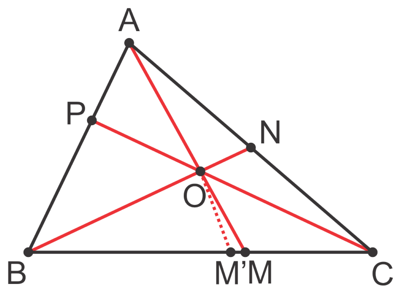

Figura 5

Aplicând **teorema 3** în triunghiul ABC cu dreptele concurente $AM',\ BN,\ CP$, scriem

$$\frac{M'B}{M'C} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1$$

şi cum, din ipoteză, avem

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1,$$

obţinem

$$\frac{M'B}{M'C} = \frac{MB}{MC} \Rightarrow \frac{M'B}{M'B + M'C} = \frac{MB}{MB + MC} \Rightarrow \frac{M'B}{BC} = \frac{MB}{BC} \Rightarrow M'B = MB.$$

Ţinând cont că $M,\ M' \in (BC)$, avem $M = M'$, fals, deoarece se contrazice presupunerea făcută. În final, deducem că dreptele $AM,\ BN,\ CP$ sunt concurente. ■

6. Teorema lui Steiner. Fie triunghiul ABC şi punctele $M,\ N \in (BC)$. Dacă $\sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle NAC$, atunci are loc relaţia:

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}. \tag{4}$$

Demonstraţie. Construim $BE \parallel AC,\ E \in AM$ şi $CF \parallel AB,\ F \in AN$ (**Figura 6**).

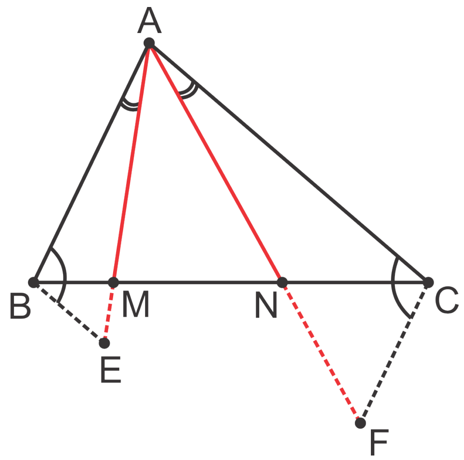

Figura 6

Mai întâi, $\sphericalangle ABE \equiv \sphericalangle ACF$, fiind unghiuri cu laturile respectiv paralele şi ţinând cont că, din ipoteză, $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle CAF$, obţinem

$$\triangle ABE \sim \triangle ACF \text{ (U.U.)} \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{AB}{AC}. \tag{5}$$

Aplicăm, în continuare, teorema fundamentală a asemănării.

Din $BE \parallel AC$ avem

$$\triangle BME \sim \triangle CMA \Rightarrow \frac{BM}{CM} = \frac{BE}{AC}, \tag{6}$$

iar din $CF \parallel AB$ avem

$$\triangle BNA \sim \triangle CNF \Rightarrow \frac{BN}{CN} = \frac{AB}{CF}. \tag{7}$$

Înmulţind, membru cu membru, relaţiile (6) şi (7), obţinem

$$\frac{BM}{CM} \cdot \frac{BN}{CN} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BE}{CF} \overset{(5)}{=} \frac{AB^2}{AC^2}$$

şi astfel am probat valabilitatea relaţiei (4). ■

7. Teorema lui Van Aubel. Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (BC)$, $N \in CA$, $P \in AB$, diferite de vârfurile triunghiului. Dacă dreptele AM, BN, CP sunt concurente într-un punct S, atunci are loc relaţia:

$$\frac{AP}{PB} + \frac{AN}{NC} = \frac{AS}{SM}. \tag{8}$$

Demonstraţie. Există două situaţii posibile:

- $P \in (AB)$ şi $N \in (AC)$ (**Figura 7-a**);
- $B \in (AP)$ şi $C \in (AN)$ (**Figura 7-b**).

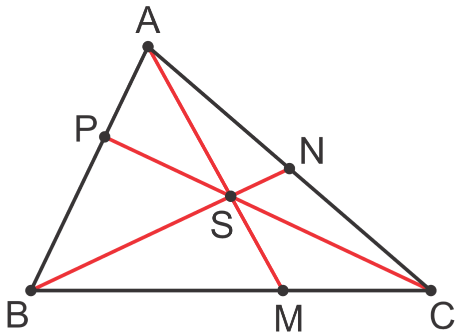

Figura 7-a

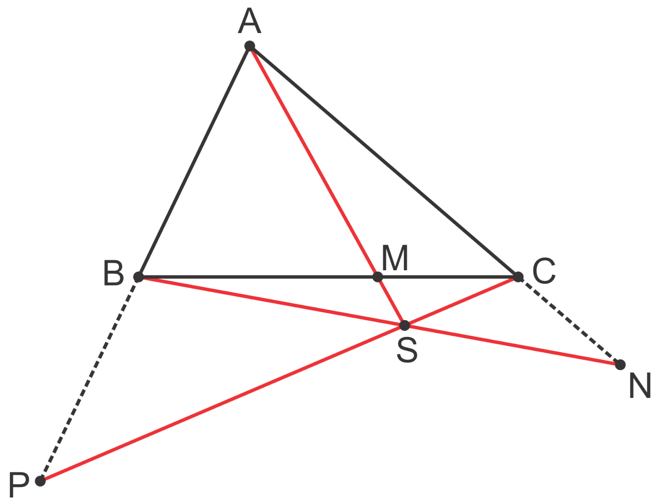

Figura 7-b

Tratăm prima situaţie, aplicând teorema lui Menelaus.

În triunghiul ABM cu transversala $C - S - P$ avem

$$\frac{CB}{CM} \cdot \frac{SM}{SA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \Rightarrow \frac{AP}{PB} = \frac{CM}{CB} \cdot \frac{SA}{SM},$$

iar în triunghiul ACM cu transversala $B - S - N$ avem

$$\frac{BC}{BM} \cdot \frac{SM}{SA} \cdot \frac{NA}{NC} = 1 \Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{BM}{CB} \cdot \frac{SA}{SM}.$$

Adunând, membru cu membru, egalităţile anterioare, obţinem

$$\underline{\frac{AP}{PB} + \frac{AN}{NC}} = \frac{CM}{CB} \cdot \frac{SA}{SM} + \frac{BM}{CB} \cdot \frac{SA}{SM} = \frac{SA}{SM} \cdot \left(\frac{CM}{CB} + \frac{BM}{CB}\right) = \underline{\frac{SA}{SM}},$$

şi relaţia (8) este demonstrată. ■

8. Teorema lui Gergonne. Fie triunghiul ABC şi punctele $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ astfel încât dreptele AM, BN, CP sunt concurente într-un punct notat cu S.

Atunci are loc relaţia:

$$\frac{SM}{AM} + \frac{SN}{BN} + \frac{SP}{CP} = 1. \tag{9}$$

Demonstraţie. Fie D şi E picioarele perpendicularelor coborâte din A şi respectiv S pe dreapta BC (**Figura 8**).

Deducem că $AD \parallel SE$, deci, conform teoremei fundamentale a asemănării, avem

$$\triangle MSE \sim \triangle MAD \Rightarrow \frac{SM}{AM} = \frac{SE}{AD}. \tag{10}$$

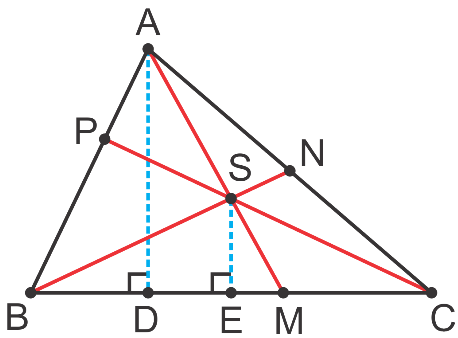

Figura 8

Dar

$$\frac{SE}{AD} = \frac{\frac{SE \cdot BC}{2}}{\frac{AD \cdot BC}{2}} = \frac{\text{aria}[SBC]}{\text{aria}[ABC]}. \tag{11}$$

Din (10) şi (11) deducem că

$$\frac{SM}{AM} = \frac{\text{aria}[SBC]}{\text{aria}[ABC]}. \tag{12}$$

În mod asemănător rezultă şi

$$\frac{SN}{BN} = \frac{\text{aria}[SCA]}{\text{aria}[ABC]} \quad \text{şi} \quad \frac{SP}{CP} = \frac{\text{aria}[SAB]}{\text{aria}[ABC]}. \tag{13}$$

Folosind acum (12) şi (13), obţinem

$$\frac{SM}{AM} + \frac{SN}{BN} + \frac{SP}{CP} = \frac{\text{aria}[SBC]}{\text{aria}[ABC]} + \frac{\text{aria}[SCA]}{\text{aria}[ABC]} + \frac{\text{aria}[SAB]}{\text{aria}[ABC]} = \frac{\text{aria}[ABC]}{\text{aria}[ABC]} = 1,$$

adică am demonstrat relaţia (9). ■

Bibliografie

[**1**] Liviu Nicolescu, Vladimir Boskoff. *Probleme practice de geometrie.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1990.

[**2**] Virgil Nicula. *Geometrie plană (sintetică, vectorială, analitică.) Culegere de probleme.* Editura GIL, Zalău, 2002.