LECȚII DE SINTEZĂ

în vederea pregătirii sesiunii iulie-august a examenului de

BACALAUREAT 2012 - M2

pentru candidații absolvenți ai liceelor din filiera tehnologică,
profil: servicii, resurse naturale şi protecția mediului, tehnic; toate specializările/calificările

MATEMATICĂ

TEMA 3. Analiză matematică clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)

Argument:

Prezentul breviar teoretic are ca scop orientarea activităților de recapitulare a materiei la matematică, în vederea asigurării atingerii nivelului minim / mediu de competență şi nu reprezintă o listă exhaustivă.
De asemenea, la aplicarea formulelor prezentate se va ține cont de însoțirea acestora de condiții de existență în funcție de mulțimile de numere pe care se aplică.

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
TEMA 2. Algebră clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)
TEMA 3. Analiză matematică clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)

TEMA 3. Analiză matematică - clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)
3.1.1. Limite de funcții - clasa a XI-a (3h/săpt.)
3.1.2. Funcții continue – clasa a XI-a (3h/săpt.)
3.1.3. Funcții derivabile – clasa a XI-a (3h/săpt.)
3.1.4. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor – clasa a XI-a (3h/săpt.)

3.1.1. Limite de funcții - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală:

→ *intervale de numere reale*;

→ *mărginire*: spunem că mulțimea nevidă $M \subset \mathbb{R}$ este mărginită dacă există $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ astfel încât $a \le x \le b$, oricare ar fi $x \in M$;

→ *vecinătăți*: spunem că mulțimea $V \subseteq \mathbb{R}$ este vecinătate a punctului $x \in \mathbb{R}$ dacă există $a \in \mathbb{R}, a > 0$ astfel încât $(x-a, x+a) \subseteq V$; spunem că mulțimea $V \subseteq \mathbb{R}$ este vecinătate a punctului $x = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă există $a \in \mathbb{R}, a > 0$ astfel încât $(a, +\infty) \subseteq V$; spunem că mulțimea $V \subseteq \mathbb{R}$ este vecinătate a punctului $x = -\infty \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă există $a \in \mathbb{R}, a > 0$ astfel încât $(-\infty, -a) \subseteq V$;

→ *dreapta reală încheiată*: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, simbolurile $+\infty$ şi $-\infty$.

→ *limite de funcții*; notație $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, x_0 punct de acumulare finit sau infinit al domeniului de definiție al funcției f ;

→ *limite laterale*:

a) $l_s(x_0) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x)$ limita la stânga punctului x_0

b) $l_d(x_0) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x)$ limita la dreapta punctului x_0

→ introducerea noțiunii de limită în relație cu reprezentare grafică pentru funcțiile studiate (de exemplu, funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcția putere $(n = 2, 3)$, funcția radical de ordin 2;

→ studiul existenței şi valoarea limitei unei funcții într-un punct, prin verificarea existenței şi egalității limitelor laterale;

→ *calculul limitelor într-un punct pentru funcțiile elementare*, identificarea limitelor funcțiilor elementare la capetele domeniilor de definiție;

→ *operații cu limite de funcții*: $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ (aplicabilă atunci când nu ne situăm în cazul de nedeterminare $\infty - \infty$); $\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x) \cdot g(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ (aplicabilă atunci când nu ne situăm în cazul de nedeterminare $0 \cdot \infty$); $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ (aplicabilă atunci când nu ne situăm în cazurile de nedeterminare $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$); $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x)\right)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ (aplicabilă atunci când nu ne situăm în cazurile de nedeterminare $1^{\infty}; 0^0; \infty^0$); în acest ultim caz se poate utiliza formula $a^b = e^{b \cdot \ln a}$, care transformă cazurile de nedeterminare de la puteri în cazul $0 \cdot \infty$.

→ *calculul limitelor pentru funcția de gradul I, funcția de gradul al II-lea, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcția putere* $(n = 2, 3)$, *funcția radical de ordin 2, funcția raport de două funcții cu grad cel mult 2*;

→ *metode de eliminare a nedeterminărilor*/cazurilor exceptate în cazul limitelor de funcții: $0/0, \quad \infty/\infty, \quad 0 \cdot \infty$

→ *limitele funcțiilor raționale*: $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$, unde $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, $n, m \in \{1, 2\}$ şi $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$; se abordează pe 3 cazuri, după tipul lui x_0:

1) x_0 finit şi $g(x_0) \neq 0$; în acest caz $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$; de exemplu, $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1} = \frac{1^2 - 1 + 1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}$;

2) $x_0 \in \{\pm\infty\}$; în acest caz avem $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & n < m \\ \operatorname{sgn}(\frac{a_n}{b_m}) \cdot (\pm\infty)^{n-m} & n > m \end{cases}$;

de exemplu, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 4}{16 - x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 4}{-x + 16} = \operatorname{sgn}\left(\frac{2}{-1}\right) \cdot (-\infty)^{2-1} = +\infty$;

3) x_0 finit şi $g(x_0) = 0$, cu subcazurile:

- $f(x_0) = 0$, caz în care avem nedeterminarea $\frac{0}{0}$ iar fracția se poate simplifica prin factorul $(x - x_0)$
- $f(x_0) \neq 0$, caz în care avem o situație de tipul $\frac{c}{0}, c \neq 0$ ce necesită determinarea semnului numitorului într-o vecinătate a lui x_0 şi, după caz, o discuție pe limite laterale; de exemplu, $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(x + 2)} = \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{4}$

→ *Asimptotele graficului pentru funcțiilor studiate* (de exemplu, funcția exponențială, funcția logaritmică, funcția raport de două funcții cu grad cel mult 2):

- *asimptotă verticală* dreapta $x = a \in \mathbb{R}$, dacă au sens şi există:
  - i) $l_s(a) = \lim\limits_{x \nearrow a} f(x) = \pm\infty$
  - ii) $l_d(a) = \lim\limits_{x \searrow a} f(x) = \pm\infty$
- *asimptotă orizontală*, dacă $+\infty$ sau/şi $-\infty$ sunt puncte de acumulare ale domeniului de definiție al funcției:
  - i) *la* $+\infty$, dreapta $y = b$, dacă $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$
  - ii) *la* $-\infty$, dreapta $y = b$, dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$
- *asimptotă oblică*, dacă $+\infty$ sau/şi $-\infty$ sunt puncte de acumulare ale domeniului de definiție al funcției:
  - i) *la* $+\infty$, dreapta $y = mx + n$, dacă $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - mx\right) = n \in \mathbb{R}$
  - ii) *la* $-\infty$, dreapta $y = mx + n$, dacă $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}^*$ şi $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) - mx\right) = n \in \mathbb{R}$.

3.1.2. Funcții continue - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Interpretarea grafică a continuității unei funcții într-un punct / pe o mulțime.
Continuitatea funcției într-un punct x_0, punct de acumulare al domeniului de definiție: $\lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = f(x_0)$.
Operații cu funcții continue (suma, produsul, raportul, ridicarea la putere);
Funcțiile elementare sunt continue pe domeniul lor de definiție.
Semnul unei funcții continue pe un interval – consecințe ale proprietății lui Darboux:

a) dacă o funcție $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$ și dacă $f(a) \cdot f(b) < 0$, atunci există cel puțin un punct $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) = 0$; dacă, în plus, funcția este strict monotonă sau injectivă, atunci punctul c este unic; proprietatea este utilă în determinarea numărului de soluții reale ale unei ecuații;
b) dacă o funcție $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ este continuă pe $[a,b]$ şi nu se anulează pe acest interval, atunci funcția f păstrează semn constant pe tot intervalul dat. (în acest caz $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$); proprietatea este utilă în rezolvarea de inecuații; enunțarea acestei proprietăți şi alegerea unei abscise convenabile din intervalul dat în care să calculăm valoarea funcției, permite stabilirea semnului funcției pe acel interval ca fiind semnul valorii calculate a funcției.

3.1.3. Funcții derivabile - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Tangenta la o curbă (prin reprezentare grafică) ca interpretare geometrică a existenței derivatei unei funcții într-un punct.
Derivata funcției f în punctul x_0, punct de acumulare al domeniului de definiție: $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

- dacă $f'(x_0) \in \{\pm\infty\}$ spunem că f are derivată în x_0, dar nu e derivabilă şi reprezentarea grafică a funcției admite tangentă verticală în punctul x_0;
- dacă $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ spunem că f este derivabilă în x_0 şi reprezentarea grafică a funcției admite tangentă oblică sau orizontală în x_0;
- dacă nu există $f'(x_0)$, spunem că funcția nu este derivabilă şi nu are derivată în punctul respectiv.

Recunoaşterea limitei raportului prin care se defineşte derivata unei funcții într-un punct, ca metodă de calcul a limitelor de funcții;

Ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(x_0, y_0)$ (cu verificarea prealabilă a derivabilității funcției în punctul x_0) este $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
Funcții derivabile (derivabile în orice punct al domeniului de definiție): exemple de funcții elementare, operații cu funcții care admit derivată / sunt derivabile.
Calculul derivatelor de ordin I şi II pentru funcțiile studiate cu ajutorul tabelelor derivatelor funcțiilor elementare şi utilizarea de reguli / operații cu funcții derivabile:
→ *derivata sumei* a două funcții derivabile: $(f+g)' = f' + g'$; *derivata produsului* de funcții derivabile: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$, caz particular $(c \cdot f)' = c \cdot f'$, unde c este constantă.
→ *derivata raportului* (în condiții de bună definire), $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, caz particular $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$.
Regulile lui l'Hospital pentru cazurile de nedeterminare $0/0$, ∞/∞; cu verificarea în prealabil a condițiilor de aplicabilitate, evidențierea cazului de nedeterminare şi aplicarea regulii (derivarea separat a numărătorului şi separat a numitorului, se va insista a nu se face confuzie cu derivata raportului).

3.1.4. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Rolul primei derivate în studiul funcțiilor, rol implicat de consecințele teoremei Lagrange: determinarea intervalelor de monotonie şi a punctelor de extrem ale funcției *f* prin:
→ calculul derivatei funcției şi a domeniului de derivabilitate;
→ rezolvarea ecuației $f'(x)=0$ (determinarea punctelor critice);
→ determinarea intervalelor în care funcției f' are semn constant prin utilizarea consecințelor proprietății lui Darboux;
→ interpretarea semnului lui f' în stabilirea intervalelor de monotonie pentru funcția f şi a tipului de monotonie pe fiecare dintre intervale ($f'\geq 0$ pe $I \Rightarrow f$ crescătoare pe I, $f'\leq 0$ pe $I \Rightarrow f$ descrescătoare pe I)
→ interpretarea succesiunii intervalelor de semn al derivatei funcției, pentru stabilirea extremelor / tipului de extrem pentru funcția dată;
Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor, cu aceleaşi etape ca în cazul primei derivate ($f''(x)=0$, stabilirea semnului celei de-a doua derivate, interpretarea semnului şi determinarea intervalelor de concavitate – convexitate, stabilirea punctelor de inflexiune ale funcției *f*, ca urmare a alternanței intervalelor de semn ale funcției f''.
Reprezentarea grafică a funcțiilor elementare: parcurgerea etapelor studiului funcției; concluzionarea asupra unor particularități ale funcției evidențiate prin construcția tabelului de variație al funcției.

TEMA 3. Analiză matematică - clasa a XI-a , clasa a XII-a (3h/săpt.)
3.2.1. Primitive(antiderivate) – clasa a XII-a (3h/săpt.)
3.2.2. Integrala definită – clasa a XII-a (3h/săpt.)
3.2.3. Aplicații ale integralei definite – clasa a XII-a (3h/săpt.)

3.2.1. Primitive (antiderivate) – clasa a XII-a (3h/săpt.)

Primitivă/primitive, definiție: se consideră o funcție $f: I \to \mathbb{R}$, unde $I \subseteq \mathbb{R}$ este un interval, funcția $F: I \to \mathbb{R}$ se numeşte primitiva funcției f dacă:

a) F este derivabilă pe I
b) $F'(x)=f(x)$, $\forall x \in I$.

Dacă există o primitivă F a funcției f, atunci f admite primitive pe intervalul I şi pentru orice primitivă $G: I \to \mathbb{R}$ a lui f, există o funcție constantă $c: I \to \mathbb{R}, c(x)=c$ astfel încât $G=F+c$.
În acest caz, mulțimea tuturor primitivelor funcției f este $\{F+\mathcal{C} / \mathcal{C}$ este mulțimea constantelor$\}$; mulțimea tuturor primitivelor funcției f se numeşte *integrala nedefinită* a funcției f şi se notează $\int f(x)\,dx = F(x)+\mathcal{C}$.
Orice funcție continuă f admite primitive (rezultat care va fi utilizat pentru a argumenta faptul că o funcție admite primitive, neimplicând şi determinarea unei primitive sau a integralei nedefinite).
Proprietate $\int f'(x)dx = f(x)+\mathcal{C}$.

Dacă funcțiile $f,g: I \to \mathbb{R}$ admit primitive şi $\alpha \in \mathbb{R}^*$, atunci funcțiile $f+g$ şi αf admit primitive şi au loc relațiile: $\int \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ şi $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$.
Dându-se două funcții $f,F: I \to \mathbb{R}$, a verifica faptul că F este o primitivă a lui f presupune sau calcularea $\int f(x)\,dx$ sau utilizarea definiției (utilizându-se formule de derivare şi/sau proprietăți).
Primitive uzuale: tabelele de formule asociate funcțiilor elementare/compunerii de funcții elementare.
Pentru calcularea unei primitive sunt necesare: cunoaşterea tabelului de primitive uzuale, aplicarea de proprietăți ale primitivelor şi, uneori, abilități de prelucrare algebrică a integrantului.

3.2.2. Integrala definită - clasa a XII-a (3h/săpt.)

Integrala definită formula Leibniz – Newton: dacă $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției continue $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, integrala definită a funcției f pe intervalul $[a,b]$ este numărul real $\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b)$.

Observație: integrala nedefinită a unei funcții reprezintă o familie de funcții, iar integrala definită a aceleiași funcții reprezintă un număr real.
Proprietăți ale integralei definite:

1. Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue pe intervalul $[a,b]$ și $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, atunci
$\int_a^b(\,\alpha f(x)+\beta g(x)\,)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$ (*proprietatea de liniaritate*).

2. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este funcție continuă pe intervalul $[a,b]$ și $f\geq 0$, atunci $\int_a^b f(x)dx\geq 0$
(*proprietatea de păstrarea semnului*, obținută ca o consecință a teoremei de medie).

3. Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ sunt funcții continue pe intervalul $[a,b]$ și $f\geq g$, atunci $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$
(*proprietatea de monotonie*, utilizată, de exemplu, în verificarea unor inegalități sau în stabilirea monotoniei unui șir de integrale nedefinite).

4. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este funcție continuă pe intervalul $[a,b]$ atunci pentru oricare $c\in[a,b]$:
$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$ (*proprietatea de aditivitate în raport cu intervalul de integrare*, utilizată, de exemplu, pentru calculul integralei definite atunci când integrantul este reprezentat de o funcție ce trebuie explicitată –funcție definită prin mai multe legi, de exemplu, funcția modul).

Metode de calcul a integralelor definite:

i) *Metoda integrării prin părți*:

Dacă $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ două funcții derivabile cu derivatele $f',g':[a,b]\to\mathbb{R}$ continue, atunci
$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx=f(x)\cdot g(x)\Big|_a^b+\int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx$.

Metoda presupune următoarea schemă de abordare:

→ evidențierea, în scrierea integrantului, a unui produs de două funcții (de exemplu, $f=1\cdot f$, $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\cdot\ln x$), dintre care una să reprezinte o primitivă a unei funcții; în general, alegerea celor două funcții f și g' se realizează astfel încât integrala nedefinită obținută să fie una mai ușor de calculat;

→ determinarea expresiilor funcțiilor f' și g;

→ finalizarea calculului prin determinarea integralei nedefinite $\int_a^b f'(x)g(x)dx$.

În anumite exerciții se poate aplica iterativ metoda integrării prin părți.

ii) *Metoda schimbării de variabilă*:

Se consideră intervalul $I\subseteq\mathbb{R}$ și funcțiile $u:[a,b]\to I$ și $f:I\to\mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:

1. f continuă pe I
2. u derivabilă pe $[a,b]$ cu derivata u' continuă pe $[a,b]$.

Atunci $\int_a^b f(u(x))\,u'(x)dx=\int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$, unde $u(x)=t$ și $u'(x)dx=dt$.

Utilizarea metodei schimbării de variabilă poate fi formalizată astfel:

- identificarea notației (schimbării de variabilă) $u(x)=t\Rightarrow\begin{cases}x=a & \Rightarrow t=u(a)\\ x=b & \Rightarrow t=u(b)\end{cases}$
- asocierea notației cu diferențierea formală $u'(x)\cdot dx=dt$
- rescrierea integrantului folosind substituțiile variabilei, a capetelor de integrare și a lui dx

iii) *Metoda de calcul a integralelor de forma* $\int_a^b\frac{P(x)}{Q(x)}dx$, grad$Q\leq 4$, prin descompunere în fracții raționale simple:

a) se scrie funcția $\frac{P(x)}{Q(x)}$ sub forma $\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ (ca urmare a aplicării teoremei împărțirii cu rest $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$)

b) se descompune funcția rațională $\frac{R(x)}{Q(x)}$ în fracții raționale simple

c) se aplică proprietatea de liniaritate a integralelor definite.

3.2.3. Aplicații ale integralei definite - clasa a XII-a (3h/săpt.)

Aria unei suprafețe plane:

i) Fie funcția $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci aria S a suprafeței cuprinse între graficul funcției f, axa Ox şi dreptele de ecuație $x = a$ şi $x = b$ este dată de relația $S = \int_a^b |f(x)|dx$.

ii) Fie funcțiile $f, g:[a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Dacă $f(x) \geq g(x)$ pe intervalul dat, atunci aria S a suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții, pe intervalul $[a,b]$, este dată de relația $S = \int_a^b (f(x)dx - g(x))dx$.

Volumul unui corp de rotație:

Fie funcția $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci volumul V al corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției f este dat de relația $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

EXEMPLE DE ITEMI TIP EXAMEN DE BACALAUREAT PENTRU RECAPITULAREA NOȚIUNILOR DIN TEMA 3

EXEMPLUL 25

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{10x}{\left(x^2+2\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției *f*.
5p	**c)** Demonstrați că $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{3}$, pentru orice $x\in[0,1]$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx$.
5p	**a)** Calculați I_1.
5p	**b)** Arătați că $I_n+I_{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.
5p	**c)** Demonstrați că $\dfrac{1}{4026}\le I_{2012}\le\dfrac{1}{2013}$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}\right)'=\dfrac{4x\left(x^2+2\right)-2x\left(2x^2-1\right)}{\left(x^2+2\right)^2}=$	**3p**
	$=\dfrac{10x}{\left(x^2+2\right)^2}$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2-1}{x^2+2}=2$	**3p**
	Ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției *f* spre $+\infty$ este $y=2$	**2p**
c)	$f'(x)\ge 0$ pentru orice $x\in[0,+\infty)\Rightarrow f$ crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$	**2p**
	$0\le x\le 1\Rightarrow f(0)\le f(x)\le f(1)\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{3}$, oricare ar fi $x\in[0,1]$	**3p**
2.a)	$I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=$	**2p**
	$=\displaystyle\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(x-\ln(x+1)\right)\Big\vert_0^1=1-\ln 2$	**3p**
b)	$I_n+I_{n+1}=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{x^n}{x+1}+\frac{x^{n+1}}{x+1}\right)dx=$	**2p**
	$=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n(x+1)}{x+1}dx=\frac{1}{n+1}$	**3p**

c)	$\frac{x^{2012}}{2} \le \frac{x^{2012}}{x+1} \le \frac{x^{2012}}{1}$ pentru orice $x \in [0, 1]$	**2p**
	$\int_0^1 \frac{x^{2012}}{2} dx \le \int_0^1 \frac{x^{2012}}{x+1} dx \le \int_0^1 x^{2012} dx$	**1p**
	$\frac{1}{4026} \le I_{2012} \le \frac{1}{2013}$	**2p**

EXEMPLUL 26

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.
5p	**a)** Arătați că $\lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 0$.
5p	**b)** Demonstrați că funcția *f* este crescătoare pe intervalul $(4, +\infty)$.
5p	**c)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției *f*.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^x$.
5p	**a)** Arătați că funcția $F:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = xe^x - e^x + 2012$ este o primitivă a funcției *f*.
5p	**b)** Calculați $\int_1^e f(\ln x)\, dx$.
5p	**c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei *Ox* a graficului funcției $g:[1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	*f* derivabilă în $x = 4 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = f'(4)$	**2p**
	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	*f* este derivabilă pe $(0, +\infty)$ şi $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$	**2p**
	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$	**1p**
	$f'(x) > 0$ pentru orice $x \in (4, +\infty)$ $\Rightarrow$ funcția *f* crescătoare pe intervalul $(4, +\infty)$	**2p**
c)	$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\sqrt{x} - \ln x\right) = +\infty$	**3p**
	$x = 0$ este ecuația asimptotei verticale la graficul funcției *f*	**2p**
2.a)	F este derivabilă şi $F'(x) = xe^x + e^x - e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$F' = f$	**2p**
b)	$\int_1^e f(\ln x)\, dx = \int_1^e x \ln x\, dx =$	**2p**

	$=\frac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=$	**1p**
	$=\frac{e^2}{2}-\frac{x^2}{4}\Big\vert_1^e=\frac{e^2+1}{4}$	**2p**
c)	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)\mathrm{d}x=$	**1p**
	$=\pi\int_1^2 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\pi\frac{e^{2x}}{2}\Big\vert_1^2=$	**2p**
	$=\frac{\pi e^2\left(e^2-1\right)}{2}$	**2p**

EXEMPLUL 27

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+1}{e^x}$.
5p	**a)** Arătați că $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{x}{x+1}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Arătați că funcția f este descrescătoare pe $(0,+\infty)$
5p	**c)** Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{e^{2x}\cdot f^2(x)}{x}$.
$	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^{2012}+x^{2011}+x^2+x$.
5p	**a)** Determinați primitiva $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a funcției *f*, care verifică relația $F(0)=1$.
5p	**b)** Calculați $\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx$.
5p	**c)** Calculați volumul corpului obținut prin rotația, în jurul axei *Ox*, a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R},\quad g(x)=f(x)-x^{2012}-x^{2011}$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{(x+1)'\cdot e^x-(x+1)\cdot\left(e^x\right)'}{e^{2x}}=-\frac{x}{e^x},\ \forall x\in(0,+\infty)$	**3p**
	Finalizare	**2p**
b)	$f'(x)=-\frac{x}{e^x}\Rightarrow f'(x)<0$, oricare ar fi $x>0$	**3p**
	Finalizare	**2p**
c)	$g(x)=\frac{x^2+2x+1}{x}$	**1p**
	$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=1$	**1p**

	$n=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g(x)-mx\right)=2$	1p
	$y=x+2$ este ecuația asimptotei oblice la graficul funcției g.	2p
2.a)	$\int f(x)dx=\frac{x^{2013}}{2013}+\frac{x^{2012}}{2012}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+C$	2p
	$F(x)=\frac{x^{2013}}{2013}+\frac{x^{2012}}{2012}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+c$ și $F(0)=1\Rightarrow c=1$	2p
	$F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{x^{2013}}{2013}+\frac{x^{2012}}{2012}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+1$	1p
b)	$\int_0^1\frac{f(x)}{x+1}dx=\int_0^1\left(x^{2011}+x\right)dx=$	2p
	$=\left.\left(\frac{x^{2012}}{2012}+\frac{x^2}{2}\right)\right\|_0^1=\frac{1}{2012}+\frac{1}{2}=\frac{1007}{2012}$	3p
c)	$g(x)=x^2+x$	1p
	$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(x^4+2x^3+x^2\right)dx=\pi\left.\left(\frac{x^5}{5}+2\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\right\|_1^2=$	3p
	$=\frac{481\pi}{30}$	1p

EXEMPLUL 28

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $-1\le\frac{x+1}{3}\le1$.
5p	**2.** Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $A(0,0)$, $B(2,2)$, $C(-1,2)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+3)-\log_2 x=2$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un element n din mulțimea $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n\ge n^2$.
5p	**5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(1,-1)$, $O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$.
5p	**6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=6$ și $m(\sphericalangle ACB)=30^\circ$.

Barem de evaluare și de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-1\le\frac{x+1}{3}\le1\Rightarrow-3\le x+1\le3$	2p
	$-4\le x\le2\Rightarrow x\in[-4,2]$	2p
	$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x\in\{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$	1p

2.	$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \\ f(2)=2 \\ f(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=0 \\ 4a+2b+c=2 \\ a-b+c=2 \end{cases}$	**3p**
	$\begin{cases} c=0 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^2-x$	**2p**
3.	Condiții $\begin{cases} x+3>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(0,+\infty)$	**1p**
	$\log_2\dfrac{x+3}{x}=2$	**2p**
	$x=1\in(0,+\infty)$	**2p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr cazuri favorabile}}{\text{nr cazuri posibile}}$	**1p**
	Cazuri posibile sunt 4	**1p**
	Cazuri favorabile sunt 3	**2p**
	$p=\dfrac{3}{4}$	**1p**
5.	$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+\vec{i}-\vec{j}=5\vec{i}-\vec{j}$	**3p**
	$C(5,-1)$	**2p**
6.	Din teorema sinusului $\dfrac{AB}{\sin C}=2R \Rightarrow R=\dfrac{AB}{2\sin C}$	**3p**
	$R=\dfrac{6}{2\cdot\frac{1}{2}}=6$	**2p**

EXEMPLUL 29

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2+2x-5$. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care abscisa vârfului parabolei asociate funcției *f* este egală cu 2.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{1-x^2}=\dfrac{1}{27}$.
5p	**4.** Calculați $C_6^2-A_4^2$.
5p	**5.** În sistemul de coordonate *xOy* se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,-2)$ și $B(6,8)$. Calculați distanța de la punctul *O* la mijlocul segmentului (AB).
5p	**6.** Calculați $\cos 130^\circ+\cos 50^\circ$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)=\log_2(9-5)=$	**3p**
	$=\log_2 4=2$	**2p**

2.	$-\frac{b}{2a}=2$ $-\frac{2}{2m}=2$ $m=-\frac{1}{2}$	**2p** **2p** **1p**
3.	$3^{1-x^2}=3^{-3}\Rightarrow 1-x^2=-3$ $x^2=4\Rightarrow x\in\{2,-2\}$	**3p** **2p**
4.	$C_6^2=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=15$ $A_4^2=\frac{4!}{(4-2)!}=12$ $C_6^2-A_4^2=3$	**2p** **2p** **1p**
5.	Dacă C este mijlocul lui $(AB)\Rightarrow C(4,3)$ $OC=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}$ $OC=5$	**2p** **2p** **1p**
6.	$\cos(\pi-x)=-\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\cos 130^\circ+\cos 50^\circ=0$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 30

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_2\frac{1}{8}+\sqrt[3]{27}$.
5p	**2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-2x+3$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-3^{x^2-1}=1$.
5p	**4.** Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\vec{v_1}=2\vec{i}-\vec{j}$ și $\vec{v_2}=\vec{i}+3\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w}=2\vec{v_1}-\vec{v_2}$.
5p	**6.** Un triunghi dreptunghic are catetele $AB=3,\ AC=4$. Determinați lungimea înălțimii duse din *A*.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$ $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ $\log_2\frac{1}{8}+\sqrt[3]{27}=0$	**2p** **2p** **1p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}=1$ $y_V=-\frac{\Delta}{4a}=2$ $V(1,2)$	**2p** **2p** **1p**

3.	$3^{x^2-1}=1$ $x^2-1=0$ $x\in\{-1,1\}$	**1p** **2p** **2p**
4.	$A_4^3=$ $=24$	**2p** **3p**
5.	$\vec{w}=2\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)-\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)=$ $=3\vec{i}-5\vec{j}\Rightarrow\vec{w}(3,-5)$	**2p** **3p**
6.	$BC=5$ $h=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=\dfrac{12}{5}$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 31

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ în care $a_3=5$ şi $a_5=11$. Calculaţi suma primilor şapte termeni ai progresiei.
5p	**2.** Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, $g(x)=x+3$. Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor *f* şi *g*.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.
5p	**4.** Calculaţi $a\cdot b$ ştiind că $a+b=150$ şi numărul *a* reprezintă 25% din numărul *b*.
5p	**5.** Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A(2,3)$, $B(4,5)$ şi $C(m+1,m^2)$ sunt coliniare.
5p	**6.** Calculaţi $\cos x$, ştiind că $\sin x=\dfrac{1}{3}$ şi $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\begin{cases}a_1+2r=5\\a_1+4r=11\end{cases}\Rightarrow a_1=-1,\ r=3$ $a_7=a_1+6r=17$, $S_7=56$	**3p** **2p**
2.	$f(x)=g(x)\Rightarrow 2x-1=x+3$ $x=4$ şi $y=7$ $A(4,7)$	**2p** **2p** **1p**
3.	Prin ridicare la puterea a 3-a se obţine $x^2-1=8$ $x=\pm3$	**1p** **2p** **2p**
4.	$a+b=150\Rightarrow\dfrac{b}{4}+b=150\Rightarrow b=120$ $a=30$ $a\cdot b=3600$	**3p** **1p** **1p**
5.	$AB:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{2}\Rightarrow x-y+1=0$ $C\in AB\Rightarrow m^2-m-2=0$ $m=-1$ sau $m=2$	**2p** **2p** **1p**

6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos x=\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$	**3p**
	$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow \cos x=\frac{2\sqrt{2}}{3}$	**2p**

EXEMPLUL 32

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_2=6$ şi $a_3=5$. Calculaţi a_6.
5p	**2.** Determinaţi soluţiile întregi ale inecuaţiei $2x^2-x-3\leq 0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3(x+2)-\log_3(x-4)=1$.
5p	**4.** După o scumpire cu 5%, preţul unui produs creşte cu 12 lei. Calculaţi preţul produsului înainte de scumpire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$ şi $B(5,0)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului $[AB]$.
5p	**6.** Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $BC=9$ şi $m(\sphericalangle BAC)=120^\circ$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\begin{cases}a_2=6\\a_3=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_1=7\\r=-1\end{cases}$	**2p**
	$a_6=a_1+5r$	**2p**
	$a_6=2$	**1p**
2.	$2x^2-x-3\leq 0\Rightarrow x\in\left[-1,\frac{3}{2}\right]$	**3p**
	$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=-1, x=0, x=1$	**2p**
3.	Condiţii de existenţă $\begin{cases}x+2>0\\x-4>0\end{cases}\Rightarrow x\in(4,+\infty)$	**1p**
	$\log_3\left(\frac{x+2}{x-4}\right)=1\Rightarrow\frac{x+2}{x-4}=3$	**2p**
	$x=7\in(4,+\infty)$	**2p**
4.	Se notează cu x preţul iniţial $5\%\cdot x=12$ lei	**3p**
	$x=240$ lei	**2p**
5.	Se notează cu M mijlocul lui $[AB]$ şi cu d mediatoarea segmentului $[AB]$; atunci $M(3,2)$	**1p**
	$m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=1$	**2p**
	$d:y-2=1\cdot(x-3)\Rightarrow d:y=x-1$	**2p**
6.	Din teorema sinusului $\Rightarrow R=\frac{BC}{2\sin A}$	**2p**
	$\sin A=\sin 120^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$R=3\sqrt{3}$	**1p**

EXEMPLUL 33

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_6 3 + \log_6 12$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^x+7^{x+1}=392$.

5p **4.** Determinați $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pentru care $C_n^2=4A_n^1$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-2)$ şi $B(4,m)$, unde $m\in\mathbb{R}$. Determinați valorile lui m pentru care $AB=5$.

5p **6.** Calculați $\cos 40^\circ+\cos 140^\circ$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\log_6 3+\log_6 12=\log_6 36$	**3p**
	$\log_6 36=\log_6 6^2=2$	**2p**
2.	$x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{4}$	**2p**
	$\Delta=-23$	**1p**
	$y_V=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{23}{8}$	**2p**
3.	$7^x+7^{x+1}=392 \Leftrightarrow 7^x+7^x\cdot 7=392$	**1p**
	$7^x\cdot 8=392 \Leftrightarrow 7^x=49$	**2p**
	$x=2$	**2p**
4.	$\frac{n!}{2!(n-2)!}=4\frac{n!}{(n-1)!}$	**2p**
	$\frac{n-1}{2}=4$	**2p**
	$n=9$	**1p**
5.	$\sqrt{(4-0)^2+(m+2)^2}=5$	**1p**
	$m^2+4m-5=0$	**2p**
	$m=-5, m=1$	**2p**
6.	$\cos 140^\circ=\cos(180^\circ-40^\circ)=-\cos 40^\circ$	**3p**
	$\cos 40^\circ+\cos 140^\circ=0$	**2p**

EXEMPLUL 34

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care numerele $x-1$, $x+1$ şi $3x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5-x$. Calculați $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1}=x-3$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente.

5p	**5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,3)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1: 2x-y-6=0$ și $d_2: -x+2y-6=0$.
5p	**6.** Calculați cosinusul unghiului *M* al triunghiului *MNP* știind că $MN=4$, $MP=5$ și $NP=6$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$2(x+1)=x-1+3x-1$ $2x=4 \Rightarrow x=2$	**2p** **3p**
2.	$f(5)=0$ $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)=0$	**3p** **2p**
3.	Condiții $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x-3\ge 0\end{cases} \Rightarrow x\in[3,+\infty)$ $x-1=(x-3)^2 \Rightarrow x^2-7x+10=0$ $x=2$ sau $x=5$ $2\notin[3,+\infty) \Rightarrow x=5$	**1p** **2p** **1p** **1p**
4.	Numărul de submulțimi ordonate este A_7^2 $A_7^2=\frac{7!}{5!}=42$	**2p** **3p**
5.	$\begin{cases} 2x-y-6=0 \\ -x+2y-6=0\end{cases} \Rightarrow x=y=6$ $d=\sqrt{(6-2)^2+(6-3)^2}$ $d=5$	**2p** **2p** **1p**
6.	$\cos M=\frac{MN^2+MP^2-NP^2}{2\cdot MN\cdot MP}$ $\cos M=\frac{1}{8}$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 35

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax+b$. Determinați numerele reale *a* și *b* pentru care graficul funcției *f* conține punctele $A(2,3)$ și $B(-1,0)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}=36$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr de 2 cifre, acesta să fie divizibil cu 4.
5p	**5.** În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele $M(2,-1)$ și $N(-1,3)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.
5p	**6.** Determinați lungimea laturii unui triunghi echilateral, care are aria egală cu $4\sqrt{3}$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)=\log_7\left[\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)\right]=$ $=\log_7 7=1$	**3p** **2p**
2.	$A(2,3)\in G_f \Rightarrow f(2)=3\Rightarrow 4+2a+b=3$ $B(-1,0)\in G_f \Rightarrow f(-1)=0\Rightarrow 1-a+b=0$ $a=0,b=-1$	**2p** **2p** **1p**
3.	$3^x+3\cdot 3^x=36$ $3^x=9$ $x=2$	**1p** **2p** **2p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$ Numerele divizibile cu 4: 12, 16,…,96 $\Rightarrow 22$ cazuri favorabile Numerele de 2 cifre: $\overline{ab},\ a\in\{1,2,...,9\},\ b\in\{0,1,2,...,9\}\Rightarrow 90$ cazuri posibile $p=\dfrac{22}{90}=\dfrac{11}{45}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5.	$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{i}+3\vec{j}=\vec{i}+2\vec{j}$ Coordonatele sunt $(1,2)$	**3p** **2p**
6.	$\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$ $l=4$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 36

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Într-o progresie aritmetică $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_1=5$ şi $r=2$. Calculaţi suma primilor 5 termeni ai progresiei.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m pentru care ecuaţia $x^2-(m+1)x+m=0$ are soluţii reale egale.
5p	**3.** Determinaţi coordonatele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2^{x+1}-1$ cu axele Ox şi respectiv Oy.
5p	**4.** Calculaţi $2C_4^2-3A_4^1$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1}=2\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=(a+3)\vec{i}+2\vec{j}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinaţi numărul $a>0$ pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Aria triunghiului MNP este egală cu 16, iar $MN=NP=8$. Calculaţi $\sin N$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$S_5=\dfrac{(2a_1+4r)\cdot 5}{2}$ $S_5=45$	**3p** **2p**

2.	$\Delta = 0$ $m^2 + 2m + 1 - 4m = 0$ $m = 1$	**1p** **2p** **2p**
3.	$G_f \cap Ox : f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$ $A(-1,0)$ $G_f \cap Oy : f(0) = 1$ $B(0,1)$	**2p** **1p** **1p** **1p**
4.	$C_4^2 = 6$ $A_4^1 = 4$ $2C_4^2 - 3A_4^1 = 0$	**2p** **2p** **1p**
5.	$\frac{2}{a+3} = \frac{a}{2}$ $a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$ sau $a = -4$ $a > 0 \Rightarrow a = 1$	**2p** **2p** **1p**
6.	Aria $\Delta MNP = \frac{MN \cdot NP \cdot \sin N}{2}$ $\sin N = \frac{2 \cdot 16}{8 \cdot 8}$ $\sin N = \frac{1}{2}$	**2p** **2p** **1p**