LECȚII DE SINTEZĂ

în vederea pregătirii sesiunii iulie-august a examenului de

BACALAUREAT 2012 - M2

pentru candidații absolvenți ai liceelor din filiera tehnologică,
profil: servicii, resurse naturale şi protecția mediului, tehnic; toate specializările/calificările

MATEMATICĂ

TEMA 2. Algebră clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)

Argument:
Prezentul breviar teoretic are ca scop orientarea activităților de recapitulare a materiei la matematică, în vederea asigurării atingerii nivelului minim / mediu de competență şi nu reprezintă o listă exhaustivă.
De asemenea, la aplicarea formulelor prezentate se va ține cont de însoțirea acestora de condiții de existență în funcție de mulțimile de numere pe care se aplică.

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
TEMA 2. Algebră clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)
TEMA 3. Analiză matematică clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)

TEMA 2. Algebră clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)
2.1. Algebră clasa **a XI-a**
- **2.1.1. Matrice** - clasa a XI-a (3h/săpt.)
- **2.1.2. Determinanți -** clasa a XI-a (3h/săpt.)
- **2.1.3. Sisteme de ecuații liniare** - clasa a XI-a (3h/săpt.)

2.1.1. Matrice - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Matrice, mulțimi de matrice: $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ m,n=\overline{1,3}$; $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} \mid a_{ij}\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,2},\ j=\overline{1,2}\right\}$, mulțimea matricelor pătratice de ordinul 2, cu elemente numere reale; $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix} \mid a_{ij}\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3}\right\}$, mulțimea matricelor pătratice de ordinul 3, cu elemente numere reale.

Elementele unei matrice $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ A=(a_{ij})_{i=\overline{1,m},\,j=\overline{1,n}}$, a_{ij} este elementul de pe linia i şi de pe coloana j.

Identificarea unui element dintr-o matrice când se cunoaşte poziția acestuia (perechea de indici).

Exemplificarea de matrice; obținerea unor matrice particulare dintr-o mulțime de matrice ce verifică condiții date, de exemplu, pentru $\mathcal{M}=\left\{A=\begin{pmatrix} a & 2b\\ b & a\end{pmatrix} \mid A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}),\ a^2-2b^2=1\right\}$ se pot identifica $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ sau $A=\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}$.

Transpusa unei matrice (liniile devin coloane şi coloanele devin linii); de exemplu, matricea $A=\begin{pmatrix}2&3&1\\0&-1&5\end{pmatrix}$ are transpusa ${}^{t}A=\begin{pmatrix}2&0\\3&-1\\1&5\end{pmatrix}$.

Matricea nulă este matricea cu toate elementele egale cu 0.

Matricea unitate (pentru matrice pătratice): $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Alte tipuri de matrice: *matrice linie, matrice coloană*.

Operații cu matrice din mulțimea $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ m,\ n=\overline{1,3}$

- *adunarea*: dacă $A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, atunci $A+B=C$, unde $C\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ și $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, oricare ar fi $i=\overline{1,m}$ și $j=\overline{1,n}$ (se adună elementele de pe poziții identice din cele două matrice, termeni ai adunării); proprietăți ale adunării de matrice : asociativitate, comutativitate, element neutru (matricea nulă, opusa unei matrice)
- *înmulțirea unei matrice cu un scalar*: dacă $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ \alpha\in\mathbb{R}$, $A=(a_{ij})$, atunci $\alpha\cdot A=C$, unde $C\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ C=(c_{ij})$ și $c_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}$, oricare ar fi $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$ (se înmulțește fiecare element al matricei cu scalarul α); se poate utiliza și pentru scoaterea unui factor comun (forțat); proprietăți: $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$; $(\alpha\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)$, unde $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$
- *înmulțirea matricelor* în cazurile bine definite: dacă $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}),\ B\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, atunci $A\cdot B=C$, unde $C\in\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R}),\ C=(c_{ij})$ și $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$, oricare ar fi $i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,p}$

Observații.

Înmulțirea matricelor pătratice de același ordin; proprietăți: asociativitate, element neutru, matricea unitate.

Există perechi de matrice pentru care înmulțirea lor este comutativă.

Efectuarea de calcule matriceale, cu utilizarea de proprietăți; rezolvarea de ecuații matriceale care implică adunarea matricelor și înmulțirea cu scalari a matricelor.

2.1.2. Determinanți - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Determinantul unei matrice pătratice de ordin cel mult 3; calculul unui determinant de ordin cel mult 3 cu regula triunghiului și/sau cu regula lui Sarrus:

- dacă $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, atunci $\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$;

- regula de calcul a determinaților de ordinul 3 (Sarus), de exemplu:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=(3x+0+y)-(3+4x+0)=0$$

$$\begin{matrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Proprietăți ale determinanților (selecție):

- dacă într-un determinant două linii (coloane) sunt identice, atunci determinantul este nul;
- dacă într-un determinant elementele unei linii (coloane) sunt nule, atunci determinantul este nul;
- dacă într-un determinant se adună la elementele unei linii (coloane) elementele altei linii (coloane), atunci valoarea determinantului nu se schimbă;
- $\det A=\det({}^tA)$, oricare ar fi A matrice pătratică;
- $\det(AB)=\det A\cdot\det B$, oricare ar fi A,B matrice pătratice de același ordin;

Aplicații ale determinanților în geometrie:

- ecuația unei drepte determinate de două puncte distincte $A(x_1,y_1)$ și $B(x_2,y_2)$ este $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}=0$

- condiția de coliniaritate a trei puncte $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ și $C(x_3,y_3)$ este $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}=0$

- aria S unui triunghi ABC cu vârfurile $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ şi $C(x_3, y_3)$ $S = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

2.1.3. Sisteme de ecuații liniare - clasa a XI-a (3h/săpt.)

Matrice inversabile în $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \in \{2,3\}$:

- definiția matricei inversabile: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este inversabilă $\Leftrightarrow$ există $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A \cdot B = B \cdot A = I_n$
- condiția pentru ca o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \in \{2,3\}$ să fie inversabilă este $\det A \neq 0$
- *calculul inversei unei matrice* din $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), n \in \{2,3\}$: calculul determinantului (şi impunerea condiției ca acesta să fie diferit de 0), scrierea transpusei, calculul complemenților algebrici şi determinarea matricei adjuncte, $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*$
- caz particular pentru matricele de ordin 2: dacă $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ şi $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$
- *determinarea inversei unei matrice inversabile* prin utilizarea de proprietăți algebrice ale calculului matriceal; de exemplu, dacă $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ şi din ipoteza unei probleme obținem o relație de tipul $A^2 - 3A = I_3$, relația se poate rescrie $A \cdot (A - 3I_3) = (A - 3I_3) \cdot A = I_3$, de unde $A^{-1} = A - 3I_3$
- proprietăți: $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$; $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$, unde A şi B sunt matrice inversabile.

Ecuații matriceale de tip:

a) $AX = B$ cu soluția $X = A^{-1}B$ (în cazul în care A este o matrice pătratică şi inversabilă)
b) $XA = B$ cu soluția $X = BA^{-1}$ (în cazul în care A este o matrice pătratică şi inversabilă)
c) $AXB = C$ cu soluția $X = A^{-1}CB^{-1}$ (în cazul A, B matrice pătratice şi inversabile).

Sisteme liniare cu cel mult 3 necunoscute; caracterizare:

- din punct de vedere al existenței soluției: *compatibil* (sistemul admite soluție/soluții); *incompatibil* (sistemul nu admite soluții);
- din punct de vedere al *unicității soluției* unui sistem compatibil: sisteme cu soluție unică (compatibil determinate) sau cu soluții care depind de un parametru (simplu nedeterminate), de doi parametri (dublu nedeterminate),...

Metode de rezolvare:

→ *metoda substituției; metoda reducerii (metoda lui Gauss, cu pivotare)*

→ *metoda matriceală*: aducerea sistemului la forma matriceală, $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$, unde A este o matrice pătratică şi inversabilă

→ aplicarea *metodei lui Cramer* pentru rezolvarea sistemelor liniare (numărul ecuațiilor este egal cu numărul necunoscutelor şi $\det A \neq 0$, unde A este matricea sistemului): calcularea determinanților obținuți din determinantul matricei A prin înlocuirea, pe rând, a câte unei coloane corespunzătoare fiecărei necunoscute cu coloana termenilor liberi; determinarea soluției.

TEMA 2. Algebră - clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa. a XII-a (3h/săpt.)
2.2.1. Grupuri - clasa a XII-a (3h/săpt.)
2.2.2. Inele şi corpuri - clasa a XII-a (3h/săpt.)
2.2.3. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p$, unde p prim) - clasa a XII-a (3h/săpt.)

2.2.1. Grupuri - clasa a XII-a (3h/săpt.)

Lege de compoziție internă: $*: M \times M \to M$, $(x, y) \to x * y$, unde M este o mulțime nevidă.
Tabla unei legi de compoziție internă pe o mulțime M
Clase de resturi mod n, $\hat{k} = \{t \in \mathbb{Z} \mid \text{restul împărțirii lui } t \text{ la } n \text{ este egal cu } k\}$, unde $k \in \{0,1,2,...,n-1\}$; mulțimea claselor de resturi $\mathbb{Z}_n = \{\hat{k} \mid k \in \{0,1,2,...,n-1\}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Operația de adunare pe $\mathbb{Z}_n$: $\hat{a} + \hat{b} = \hat{c}$, unde clasa $\hat{c}$ se determină calculând restul împărțirii sumei $(a+b)$ la n; proprietăți: asociativitate, comutativitate, element neutru $\hat{0}$; opusul clasei $\hat{k}$, $k \in \{1,2,...,n-1\}$ este clasa lui $\widehat{n-k}$.
Operația de înmulțire pe $\mathbb{Z}_n$: $\hat{a} \cdot \hat{b} = \hat{c}$, unde clasa $\hat{c}$ se determină calculând restul împărțirii produsului $(a \cdot b)$ la n; proprietăți: asociativitate, comutativitate, element neutru $\hat{1}$; există inversul clasei $\hat{k}$, $k \in \{1,2,...,n-1\}$ numai în cazul în care $(k,n)=1$ (numere prime între ele); exemplu, în $\mathbb{Z}_6 = \{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\hat{3},\hat{4},\hat{5}\}$, clasele $\hat{1}$ și $\hat{5}$ sunt inversabile şi inversul clasei $\hat{1}$ este clasa $\hat{1}$, iar inversul clasei $\hat{5}$ este clasa $\hat{5}$, iar clasele $\hat{0}$, $\hat{2}$, $\hat{3}$, $\hat{4}$ nu sunt inversabile; dacă $p \in \mathbb{N}^*, p$ prim, atunci toate clasele, cu excepția clasei $\hat{0}$, sunt inversabile.
Parte stabilă în raport cu o lege de compoziție definită pe o mulțime nevidă M : oricare ar fi $x, y \in M \Rightarrow x * y \in M$
Grup, notație $(G,*)$, G mulțime nevidă şi $*: G \times G \to G$ (lege de compoziție internă); *axiomele grupului*:

- *asociativitate*: $x*(y*z) = (x*y)*z$, oricare ar fi $x, y, z \in G$
- *existența elementului neutru*: există $e \in G$ astfel încât $x*e = e*x = x$, oricare ar fi $x \in G$; (dacă există, elementul neutru este unic); determinarea elementului neutru revine la rezolvarea unui sistem de ecuații în care necunoscuta este e, soluția obținută fiind element neutru doar dacă **<u>nu</u>** depinde de alegerea lui x
- *orice element este simetrizabil*: oricare ar fi $x \in G$, există $x' \in G$ astfel încât $x*x' = x'*x = e$; (dacă există, inversul unui element este unic); determinarea inversului unui element revine la rezolvarea unui sistem de ecuații în care necunoscuta este x'.

Grup comutativ (*abelian*) este un grup în care legea de compoziție internă este şi comutativă.
Este utilă verificarea comutativității înainte de verificarea axiomelor privind elementul neutru / elementele simetrizabile, pentru a uşurasimplifica verificarea acestor axiome.
Exemple de:

- *grupuri numerice*
- *grupuri de matrice*; în verificarea structurii de grup pentru submulțimi ale unei mulțimi de matrice, se poate invoca faptul că asociativitatea este o proprietate valabilă pe toate mulțimile de matrice cu elemente numere sau clase de resturi; există grupuri de matrice, în raport cu operația de înmulțire, care sunt comutative; utilizarea elementelor de algebră matriceală, prin utilizarea proprietăților rezultate din condiția de parte stabilă (de exemplu, dacă se evidențiază o proprietate de tipul $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, aceasta poate fi utilizată în rezolvarea unor cerințe ulterioare, fără a apela mereu la calculul efectiv cu tablourile matriceale)
- $(\mathbb{Z}_n, +)$ este grup comutativ, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$; $(\mathbb{Z}_p \setminus \{\hat{0}\}, \cdot)$ este grup comutativ (unde $p \in \mathbb{N}^*$, p prim).

Acestui capitol i se pot asocia cerințe de tip rezolvarea de ecuații într-un grup sau calcularea unor relații între elemente ale grupului, situații care nu necesită verificarea axiomelor grupului ci doar utilizarea lor pentru efectuarea calculelor.
Morfism şi izomorfism de grupuri:
Se consideră $(G_1,*)$ şi $(G_2,\circ)$ grupuri.
Funcția $f: G_1 \to G_2$ se numeşte *morfism* de grupuri dacă $f(x*y) = f(x) \circ f(y), \forall x, y \in G_1$.
Funcția $f: G_1 \to G_2$ se numeşte *izomorfism* de grupuri dacă este morfism şi este bijectivă.
Proprietăți: dacă f este izomorfism, atunci:

- $f(e) = e'$, unde e şi e' sunt elementele neutre ale grupurilor $(G_1,*)$ şi, respectiv, $(G_2,\circ)$

- $f(x') = (f(x))'$, oricare ar fi $x \in G_1$ (imaginea simetricului lui x este egală cu simetricul imaginii lui x)

Pot fi formulate enunțuri în care se cere să demonstrăm că nu există izomorfism între două grupuri date; în acest caz, trebuie identificată o proprietate a izomorfismului, care nu este verificată;

2.2.2. Inele şi corpuri - clasa a XII-a (3h/săpt.)

Definiția inelului; verificarea axiomelor inelului; exemple de inele numerice: $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_n$, inele de matrice, inele de funcții reale.
Divizori ai lui „0”, cu aplicații la rezolvarea de ecuații în $\mathbb{Z}_n$.
Definiția corpului; verificare axiomelor corpului. Exemple de corpuri numerice: $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ şi $\mathbb{Z}_p$ cu p prim.

2.2.3. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$, unde p prim) - clasa a XII-a (3h/săpt.)

Forma algebrică a unui polinom: $P = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ \ldots \ + a_0$, unde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in K$, $a_n \neq 0$ unde K poate fi $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_p$, p prim; *gradul unui polinom*, *calcularea unor valori* ale polinomului; semnficația unor valori: $f(0)$ este utilizată pentru determinarea termenului liber; $f(1)$ este utilizată pentru determinarea sumei coeficineților polinomului
Operații cu polinoame (adunarea, înmulțirea, înmulțirea cu un scalar); proprietăți.
Metoda identificării coeficienților
Teorema împărțirii cu rest: pentru orice două polinoame $f, g \in K[X]$, $g \neq 0$, există polinoamele $q, r \in K[X]$ unice astfel încât $f = g \cdot q + r$ şi grad $r <$ grad g.
Împărțirea polinoamelor: utilizarea algoritimilor specifici; schema lui Horner, utilizată pentru determinarea câtului şi a restului rezultate la efectuarea împărțirii la $X - a$.
Teorema împărțirii la $X - a$: restul împărțirii polinomului $f \in K[X]$ la $X - a$ este $f(a)$.
Divizibilitatea polinoamelor: fie polinoamele $f, g \in K[X], g \neq 0$, atunci f se divide prin g dacă există $h \in K[X]$ astfel încât $f = gh$.
Teorema lui Bezout: fie polinomul $f \in K[X], f \neq 0$ şi $a \in K$, atunci a este rădăcină a polinomului f dacă şi numai dacă f se divide prin $X - a$; consecință: în acest caz, există $g \in K[X]$ astfel încât $f = (X - a) \cdot g$
Rădăcini ale polinoamelor: rădăcini simple, rădăcini multiple: a este rădăcină de ordin de multiplicitate p, $p \in \mathbb{N}^*$ a polinomului f dacă $(X-a)^p \mid f$ şi $(X-a)^{p+1} \nmid f$; în cazul rădăcinilor reale multiple pentru un polinom cu coeficienți reali, se poate utiliza funcția polinomială ataşată şi proprietăți de derivabilitate ale funcțiilor reale.
Descompunerea unor polinoame în factori ireductibili: de exemplu, dacă $f \in \mathbb{R}[X]$ admite toate rădăcinile reale şi grad $f = n \geq 1$, atunci f se poate descompune în factori ireductibili $f = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, unde $x_1, x_2 \ldots x_n$ sunt rădăcinile reale ale polinomului f; descompunere peste corpul numerelor reale: un polinom cu coeficienți reali admite ca factori ireductibili, peste corpul numerelor reale, cel mult factori de gradul I sau de gradul al doilea, în acest caz, discriminantul asociat factorilor de gradul al doilea fiind negativ.
Numărul de rădăcini reale ale unui polinom nenul cu coeficienți reali este cel mult egal cu gradul polinomului.
Relațiile lui Viète pentru polinoame de grad cel mult 3:

i) dacă $f \in K[X], f = aX^2 + bX + c, \quad a \in K^*$ şi $x_1, x_2 \in K$ sunt rădăcinile lui f, atunci au loc relațiile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

ii) dacă $f \in K[X],\ f = aX^3 + bX^2 + cX + d,\quad a \in K^*$ şi $x_1, x_2, x_3 \in K$ sunt rădăcinile lui f , atunci au loc relațiile: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$

Rezolvarea *ecuațiilor algebrice* cu coeficienți în $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$:

- dacă o ecuație algebrică cu coeficienți întregi are rădăcini întregi, atunci ele se găsesc printre divizorii termenului liber;
- dacă o ecuație algebrică cu coeficienți întregi, $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ \ldots\ + a_0 = 0$, are rădăcini raționale, atunci acestea sunt de forma $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, (p, q) = 1$, unde p este divizor al termenului a_0 şi q este un divizor al termenului a_n ;
- dacă o ecuație cu coeficienți raționali are soluția $x_1 = a + b\sqrt{c},\ a, b, c \in \mathbb{Q},\ \sqrt{c} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, atunci are şi soluția $x_2 = a - b\sqrt{c}$, cu acelaşi ordin de multiplicitate ca soluția $x_1 = a + b\sqrt{c}$;

Ecuații bipătrate: $ax^4 + bx^2 + c = 0,\ a \neq 0$, se utilizează substituția $x^2 = t$ şi se rezolvă ecuația $at^2 + bt + c = 0$.

Ecuații binome: $x^n = a$, unde $a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$; cazuri particulare: $x^2 = a$ are soluții reale numai în cazul $a \geq 0$, soluții egale cu $\pm\sqrt{a}$; $x^3 = a,\ a \in \mathbb{R}$ are unica soluție reală $\sqrt[3]{a}$; $x^4 = 1$ are soluțiile reale ± 1.

Ecuațiile reciproce se clasifică în:

- ecuații reciproce de grad impar, care admit întotdeauna rădăcina -1; se împarte expresia algebrică asociată prin $X + 1$ şi se continuă cu rezolvarea unei ecuații algebrice reciproce de grad par;
- ecuații reciproce de grad par, care se rezolvă utilizând substituția $t = x + \dfrac{1}{x}$, folosind relația $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$; de exemplu, ecuația de gradul al patrulea se împarte la x^2 pentru a evidenția substituția.

EXEMPLE DE ITEMI TIP EXAMEN DE BACALAUREAT PENTRU RECAPITULAREA NOȚIUNILOR DIN TEMA 2

EXEMPLUL 13

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} mx-2y+z=1 \\ 2x-my-3z=3 \\ x-y+2z=4 \end{cases}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că suma elementelor de pe diagonala principală a matricei sistemului este egală cu 2.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care matricea sistemului are determinantul diferit de zero.

5p **c)** Pentru $m=1$ arătați că $y_1^{\,2}=x_1\cdot z_1$, unde (x_1,y_1,z_1) este soluția sistemului.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+mX+1$, unde $m\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Pentru $m=0$, calculați restul împărțirii polinomului f la $X-1$.

5p **b)** Arătați că polinomul f este divizibil cu $X+1$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Suma elementelor de pe diagonala principală a matricei este egală cu $m+(-m)+2$ Finalizare	**3p** **2p**
b)	$\det A=-2m^2-2m+12$ $m\in\mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$	**2p** **3p**
c)	Pentru $m=1\Rightarrow x=4$, $y=2$, $z=1$ Finalizare	**4p** **1p**
2.a)	Pentru $m=0\Rightarrow f=X^3+1$ Restul este egal cu $f(1)=2$	**2p** **3p**
b)	$f(-1)=-1+m-m+1=0$ $X+1\mid f$	**3p** **2p**
c)	$f=(X+1)\left(X^2+(m-1)X+1\right)$ f are trei rădăcini reale $\Leftrightarrow X^2+(m-1)X+1$ are două rădăcini reale $\Leftrightarrow m^2-2m-3\geq 0$ $m\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$	**2p** **2p** **1p**

EXEMPLUL 14

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $H(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ln x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, cu $x\in(0.+\infty)$.

5p **a)** Arătați că $\det(H(x))=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați numărul real a astfel încât $H(x)\cdot H(a)=H(x)$, pentru orice $x>0$.

5p **c)** Calculați determinantul matricei $H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)$.

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f=X^3+3X^2-3X-1$, cu rădăcinile x_1,x_2,x_3.

5p **a)** Arătați că polinomul *f* se divide prin $X-1$.

5p **b)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

5p **c)** Verificați dacă $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=13$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(H(x))=1+0-0$ Finalizare	**4p** **1p**
b)	$H(x)\cdot H(a)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&\ln a+\ln x\\0&0&1\end{pmatrix}$ $\ln a=0\Rightarrow a=1$	**2p** **3p**
c)	$H(1)+H(2)+\ldots+H(2012)=\begin{pmatrix}2012&0&0\\0&2012&\ln(2012!)\\0&0&2012\end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix}2012&0&0\\0&2012&\ln(2012!)\\0&0&2012\end{vmatrix}=2012^3$	**2p** **3p**
2.a)	$f(1)=1^3+3\cdot1^2-3\cdot1-1$ $f(1)=0\Rightarrow X-1\mid f$	**3p** **2p**
b)	$x_1+x_2+x_3=-3$ $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-3$ $x_1^2+x_2^2+x_3^2=15$	**1p** **1p** **3p**
c)	$f=X^3+3X^2-3X-1=(X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)\Rightarrow f(2)=(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)$ $f(2)=13$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 15

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y-2z=0\\x-y+z=1\\x+y+az=2\end{cases}$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei asociate sistemului.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care matricea asociată sistemului este inversabilă.

5p **c)** Pentru $a=0$, rezolvați sistemul de ecuații.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă $x*y=x+y-1$.

5p **a)** Arătați că $x*1=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x*x=4$.

5p **c)** Determinați numărul natural *n*, $n\geq2$, pentru care $C_n^1*C_n^2=14$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A=\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2a-4$	**3p**
b)	Matricea asociată sistemului este inversabilă $\Leftrightarrow -2a-4\neq 0$	**3p**
	$a\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$	**2p**
c)	$\begin{cases}x+y-2z=0\\ x-y+z=1\\ x+y=2\end{cases}$	**2p**
	$x=1,\ y=1,\ z=1$	**3p**
2.a)	$x*1=x+1-1=$	**4p**
	$=x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**1p**
b)	$x*x=2x-1$	**2p**
	$(x*x)*x=3x-2$	**2p**
	$x=2$	**1p**
c)	$C_n^1=n, C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$	**2p**
	$n^2+n-30=0$	**2p**
	Finalizare: $n=5$	**1p**

EXEMPLUL 16

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi determinantul matricei A.

5p **b)** Verificaţi dacă $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde A^{-1} este inversa matricei A.

5p **c)** Rezolvaţi ecuaţia $A\cdot X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Fie polinomul $f\in\mathbb{Z}_3[X], f=X^3+\hat{2}X^2$ şi mulţimea $G=\left\{g=aX^3+bX^2+cX+d \,\middle|\, a,b,c,d\in\mathbb{Z}_3\right\}$.

5p **a)** Calculaţi $f(\hat{1})$.

5p **b)** Determinaţi rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinaţi numărul elementelor mulţimii G.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{vmatrix}$	**3p**
	Calculul determinantului: $\det(A)=1$	**2p**
b)	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ sau	**2p**
	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	**2p**
	Deci $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$	**1p**
c)	Prin înmulţire cu A^{-1} la stânga se obţine $X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$	**2p**
2.a)	$f(\hat{1})=\hat{1}^3+\hat{2}\cdot\hat{1}^2=$	**2p**
	$=\hat{1}+\hat{2}=\hat{0}$	**3p**
b)	$f=X^2(X+2)$	**2p**
	Rădăcinile lui f sunt $\hat{0},\hat{0}$ şi $\hat{1}$	**3p**
c)	$\mathbb{Z}_3=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\}\Rightarrow a,b,c,d$ pot lua câte trei valori fiecare	**3p**
	Deci G are $3^4=81$ elemente	**2p**

EXEMPLUL 17

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru $m\in\mathbb{R}$ se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&3&-1\\m&0&2\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x-y-z=-2\\x+3y-z=-2\\mx+2z=4\end{cases}$, unde $x,y,z\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Calculaţi determinantul matricei *A*.

5p **b)** Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care matricea *A* este inversabilă.

5p **c)** Rezolvaţi sistemul pentru $m=-1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=2xy-2x-2y+3$.

5p **a)** Demonstraţi că $x\circ y=2(x-1)(y-1)+1$, pentru oricare $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi elementul neutru al legii „$\circ$”.

5p	**c)** Dați exemplu de două numere $a,b \in \mathbb{Q}-\mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ m & 0 & 2 \end{vmatrix}=$ $=6+m+0+3m+0+2=8+4m$	**3p** **2p**
b)	A inversabilă $\Leftrightarrow \det(A)\neq 0 \Leftrightarrow 8+4m\neq 0$ $m\in\mathbb{R}-\{-2\}$	**3p** **2p**
c)	Pentru $m=-1$ rezultă $\det(A)=4\neq 0$ Se obține $x=y=0, z=2$	**2p** **3p**
2.a)	$x\circ y=2xy-2x-2y+2+1=$ $=2(x-1)(y-1)+1$	**2p** **3p**
b)	$x\circ e=x, \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow 2(x-1)(e-1)+1=x$ Finalizare: $e=\frac{3}{2}$	**2p** **3p**
c)	Un exemplu este $x=\frac{5}{2}, y=\frac{5}{3}$ $\frac{5}{2}\circ\frac{5}{3}=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}+1=3\in\mathbb{Z}$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 18

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5p	**a)** Calculați A^2-A.
5p	**b)** Determinați inversa matricei *A*.
5p	**c)** Rezolvați ecuația $A\cdot X=\begin{pmatrix} 2010 & 2010 \\ 2009 & 2010 \end{pmatrix}$, $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
	2. Se consideră polinoamele $f,g\in\mathbb{Z}_3[X]$, $f=X^2+X$, $g=X^2+\hat{2}X+a$, cu $a\in\mathbb{Z}_3$.
5p	**a)** Calculați $f(\hat{0})+f(\hat{1})$.
5p	**b)** Determinați rădăcinile polinomului f.
5p	**c)** Demonstrați că $f(\hat{0})+f(\hat{1})+f(\hat{2})=g(\hat{0})+g(\hat{1})+g(\hat{2})$, pentru oricare $a\in\mathbb{Z}_3$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2-A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	**3p** **2p**

b)	$\det(A) = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$ $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	**1p** **2p** **2p**
c)	Prin înmulțire la stânga cu A^{-1} se obține $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2010 & 2010 \\ 2009 & 2010 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 2009 & 2010 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$f(\hat{0}) = \hat{0}$ $f(\hat{1}) = \hat{2}$ $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) = \hat{2}$	**2p** **2p** **1p**
b)	$f(\hat{0}) = \hat{0}, f(\hat{1}) = \hat{2}, f(\hat{2}) = \hat{0}$ Rădăcinile lui *f* sunt $\hat{0}$ şi $\hat{2}$	**3p** **2p**
c)	$g(\hat{0}) = a, g(\hat{1}) = a, g(\hat{2}) = \hat{2} + a$ $g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2}) = a + a + \hat{2} + a = \hat{2}$ $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2}) = \hat{2}, \forall a \in \mathbb{Z}_3$	**2p** **2p** **1p**

EXEMPLUL 19

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru $m \in \mathbb{R}$ se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuații $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$, unde $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Calculați determinantul matricei *A*.

5p **b)** Rezolvați sistemul pentru $m = 0$.

5p **c)** Verificați dacă sistemul este incompatibil pentru $m = 1$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = (x-4)(y-4) + 4$.

5p **a)** Demonstrați că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Demonstrați că $x * y \in (4, +\infty)$, oricare ar fi $x, y \in (4, +\infty)$.

5p **c)** Calculați $1 * 2 * 3 * ... * 2010$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A)=\begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=$	**1p**
	$=m^2+1-m-m=$	**3p**
	$=(m-1)^2$	**1p**
b)	$\begin{cases} y=-1 \\ x+y+z=3 \\ x+y=0 \end{cases}$	**2p**
	$\begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$	**3p**
c)	$\begin{cases} x+y=-1 \\ x+y+z=3 \\ x+y+z=0 \end{cases}$	**2p**
	Scăzând ultimele 2 ecuații se obține $0=3 \Rightarrow$ sistem incompatibil.	**3p**
2.a)	$(x*y)*z=(x*y-4)(z-4)+4=$	**1p**
	$((x-4)(y-4)+4-4)(z-4)+4=$	**1p**
	$=(x-4)(y-4)(z-4)+4=$	**1p**
	$=(x-4)((y-4)(z-4)+4-4)+4=$	**1p**
	$=(x-4)(y*z-4)+4=$	**1p**
	$=x*(y*z)$	**1p**
b)	$\left.\begin{array}{l} x>4 \Rightarrow x-4>0 \\ y>4 \Rightarrow y-4>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x-4)(y-4)>0$	**3p**
	$(x-4)(y-4)+4>4, \forall x,y>4$	**2p**
c)	$x*4=4*x=4, \forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
	$1*2*3*...*2010=(1*2*3)*4*(5*...*2010)=$	**1p**
	$=4$	**2p**

EXEMPLUL 20

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră determinantul $D(x,y)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x+1 & y+1 \end{vmatrix}$, unde $x,y\in\mathbb{Z}$.

5p **a)** Calculați $D(-1,1)$.

5p **b)** Determinați $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $D(x,2010)=1$.

5p **c)** Demonstrați că $D(x,y)\cdot D(x,-y)=D(x^2,y^2)$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{Z}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x*y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2(x-3)(y-3)+3$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.

5p **c)** Calculați $1*2*...*2011$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$D(-1,1)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&0&2\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2$	**3p**
b)	$D(x,2010)=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&x&2010\\1&x+1&2011\end{vmatrix}=$	**1p**
	$=x-2010$	**2p**
	$x-2010=1\Rightarrow x=2011\in\mathbb{Z}$	**2p**
c)	$D(x,y)=x-y$	**2p**
	$D(x,-y)=x+y$ şi $D(x^2,y^2)=x^2-y^2$	**2p**
	Finalizare	**1p**
2.a)	$x*y=2xy-6x-6y+21=2x(y-3)-6(y-3)+3=$	**3p**
	$=(y-3)(2x-6)+3=2(x-3)(y-3)+3$	**2p**
b)	$(x*y)*z=4(x-3)(y-3)(z-3)+3$	**2p**
	$x*(y*z)=4(x-3)(y-3)(z-3)+3$	**2p**
	Finalizare	**1p**
c)	$x*3=3*x=3$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$	**3p**
	$(1*2)*3*(4*...*2011)=3$	**2p**

EXEMPLUL 21

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}m&-1&1\\1&m&-1\\1&-2&1\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuații $\begin{cases}mx-y+z=0\\x+my-z=0\\x-2y+z=0\end{cases}$, unde m este parametru real.

5p **a)** Calculați determinantul matricei A.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care tripletul $(-1,2,5)$ este o soluție a sistemului.

5p **c)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul admite doar soluția $(0,0,0)$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x*y=xy+x+y$.

5p **a)** Arătați că legea „$*$” este asociativă.

5p **b)** Determinați elementul neutru al legii „$*$”.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2*2=x*4$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea		**30 de puncte**
1.a)	$\det A=\begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=m^2-2+1-m-2m+1=$	**3p**
	$=m^2-3m$	**2p**
b)	$\begin{cases} -m-2+5=0 \\ -1+2m-5=0 \\ -1-4+5=0 \end{cases}$	**3p**
	$m=3$	**2p**
c)	$\det A\neq 0$	**2p**
	$m^2-3m\neq 0$	**1p**
	$m\in\mathbb{R}\setminus\{0,3\}$	**2p**
2.a)	$(x*y)*z=(xy+x+y)*z=xyz+xz+yz+xy+x+y+z$	**2p**
	$x*(y*z)=x*(yz+y+z)=xyz+xy+xz+x+yz+y+z$	**2p**
	$(x*y)*z=x*(y*z)$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}\Rightarrow$ legea "$*$" este asociativă	**1p**
b)	Există $e\in\mathbb{R}$ astfel încât $x*e=e*x=x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$	**1p**
	$x*e=x\Rightarrow xe+e=0;\ e*x=x\Rightarrow ex+e=0$	**2p**
	$e=0\in\mathbb{R}$	**2p**
c)	$x^2*2=3x^2+2$	**1p**
	$x*4=5x+4$	**1p**
	$x^2*2=x*4\Rightarrow 3x^2-5x-2=0$	**1p**
	$x=-\dfrac{1}{3}$ sau $x=2$	**2p**

EXEMPLUL 22

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ şi $X(a)=I_2+aA$, unde $a\in\mathbb{Z}$.
5p	**a)** Calculați A^2-3A.
5p	**b)** Demonstrați că $X(a)\cdot X(b)=X(a+b+3ab)$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{Z}$.
5p	**c)** Arătați că $X(a)$ este matrice inversabilă, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$.
	2. Polinomul $f=X^3+2X^2-5X+m$, cu $m\in\mathbb{R}$ are rădăcinile x_1, x_2 şi x_3 .
5p	**a)** Calculați $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.
5p	**b)** Determinați $m\in\mathbb{R}^*$ pentru care $x_1+x_2+x_3=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{1}{x_3}$.
5p	**c)** Arătați că determinantul $\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este număr natural, oricare ar fi $m\in\mathbb{R}$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$A^2=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3\\-6&6\end{pmatrix}$	**3p**
	$3A=\begin{pmatrix}3&-3\\-6&6\end{pmatrix}$	**1p**
	$A^2-3A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$	**1p**
b)	$X(a)\cdot X(b)=(I_2+aA)\cdot(I_2+bA)=I_2+bA+aA+abA^2=$	**2p**
	$=I_2+aA+bA+3abA=$	**1p**
	$=I_2+(a+b+3ab)A=X(a+b+3ab)$	**2p**
c)	$X(a)=I_2+aA=\begin{pmatrix}1+a&-a\\-2a&1+2a\end{pmatrix}$	**2p**
	$X(a)$ matrice inversabilă $\Leftrightarrow \det X(a)\neq 0$	**1p**
	$1+3a\neq 0\Rightarrow a\neq -\frac{1}{3}$	**1p**
	Deoarece $-\frac{1}{3}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow X(a)$ este matrice inversabilă oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$	**1p**
2.a)	Din relațiile lui Viète avem $x_1+x_2+x_3=-2$ şi $x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3=-5$	**2p**
	$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3)=$	**2p**
	$=14$	**1p**
b)	$x_1x_2x_3=-m$	**1p**
	$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}=\frac{x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_3+x_2\cdot x_3}{x_1\cdot x_2\cdot x_3}=\frac{5}{m}$	**2p**
	$x_1+x_2+x_3=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\Leftrightarrow m=-\frac{5}{2}$	**2p**
c)	$\Delta=(x_1+x_2+x_3)\left(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1-x_1^2-x_2^2-x_3^2\right)=$	**3p**
	$=-2(-5-14)=38\in\mathbb{N}$	**2p**

EXEMPLUL 23

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră punctele $A_n\left(2^n,3^n\right)$, unde $n\in\mathbb{N}$.

5p **a)** Scrieți ecuația dreptei A_0A_1.

5p **b)** Demonstrați că punctele A_1, A_2 şi A_3 nu sunt coliniare.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care aria triunghiului $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ este egală cu 216.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziție $x\circ y=\frac{1}{2}(xy-x-y+3)$.

5p **a)** Verificați dacă elementul neutru al legii „$\circ$” este $e=3$.

5p **b)** Determinați simetricul elementului 2 în raport cu legea „$\circ$”.

5p **c)** Arătați că mulțimea $H=\{2k+1\mid k\in\mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II-lea **30 de puncte**

1.a)	$A_0(1,1)$, $A_1(2,3)$ $A_0A_1 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $A_0A_1 : y = 2x-1$	**1p** **2p** **2p**
b)	$A_1(2,3)$, $A_2(4,9)$, $A_3(8,27)$ Verificarea faptului că $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \\ 8 & 27 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$	**2p** **3p**
c)	$A = \frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$ $\Delta = \begin{vmatrix} 2^n & 3^n & 1 \\ 2^{n+1} & 3^{n+1} & 1 \\ 2^{n+2} & 3^{n+2} & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 6^n$ $\frac{2\cdot 6^n}{2} = 216 \Rightarrow n = 3$	**1p** **3p** **1p**
2.a)	$x \circ 3 = \frac{1}{2}\left(x\cdot 3 - x - 3 + 3\right) = x$ $3 \circ x = \frac{1}{2}\left(3\cdot x - 3 - x + 3\right) = x$ Deci $x \circ 3 = 3 \circ x = x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$	**2p** **2p** **1p**
b)	Căutăm $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $a \circ 2 = 2 \circ a = 3$ $2 \circ a = a \circ 2$ $\frac{1}{2}\left(2a - 2 - a + 3\right) = 3$ $a + 1 = 6 \Rightarrow a = 5$	**1p** **1p** **1p** **2p**
c)	Fie $x, y \in H \Rightarrow x = 2k+1, y = 2p+1,\ k, p \in \mathbb{Z}$ $x \circ y = \frac{1}{2}\left(4kp + 2k + 2p + 1 - 2k - 1 - 2p - 1 + 3\right)$ $x \circ y = 2kp + 1 \in H$	**1p** **2p** **2p**

EXEMPLUL 24

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A_n\left(n-1, n+2\right)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
5p	**a)** Determinaţi ecuaţia dreptei A_1A_2.
5p	**b)** Demonstraţi că punctele A_m, A_n, A_p sunt coliniare, oricare ar fi $m, n, p \in \mathbb{N}^*$.
5p	**c)** Pentru fiecare $p \in \mathbb{N}^*$ notăm $M_p = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \middle| A_nA_p \le 2 \right\}$. Determinaţi elementele mulţimii M_{2011}.
	2. Se consideră polinomul $f = X^3 + \left(m-3\right)X^2 - 17X + \left(2m+7\right)$, cu $m \in \mathbb{R}$.
5p	**a)** Pentru $m = 4$ determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X - 3$.

5p	**b)** Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X-1$.
5p	**c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x + 9^x - 17 \cdot 3^x + 15 = 0$.

Barem de evaluare şi notare

SUBIECTUL al II -lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A_1(0,3)$, $A_2(1,4)$	**2p**
	$A_1A_2 : \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$	**2p**
	$A_1A_2 : y = x + 3$	**1p**
b)	Justificarea faptului că $\begin{vmatrix} m-1 & m+2 & 1 \\ n-1 & n+2 & 1 \\ p-1 & p+2 & 1 \end{vmatrix} = 0$	**3p**
	$\Rightarrow A_m, A_n, A_p$ coliniare	**2p**
c)	$A_nA_{2011} \le 2$	**1p**
	$\sqrt{(n-2011)^2 + (n-2011)^2} \le 2$	**1p**
	$\lvert n-2011 \rvert \le \sqrt{2}$	**1p**
	$M_{2011} = \{2010, 2011, 2012\}$	**2p**
2.a)	$m = 4 \Rightarrow f = X^3 + X^2 - 17X + 15$	**1p**
	$C = X^2 + 4X - 5$	**3p**
	$R = 0$	**1p**
b)	$f \vdots (X-1) \Leftrightarrow f(1) = 0$	**1p**
	$f(1) = 1 + m - 3 - 17 + 2m + 7 = 3m - 12$	**2p**
	$3m - 12 = 0 \Rightarrow m = 4$	**2p**
c)	Cu notația $3^x = y > 0 \Rightarrow y^3 + y^2 - 17y + 15 = 0 \Rightarrow (y-1)(y-3)(y+5) = 0$	**2p**
	$y = -5 < 0$	**1p**
	$y = 1 \Rightarrow x = 0$	**1p**
	$y = 3 \Rightarrow x = 1$	**1p**