LECȚII DE SINTEZĂ

în vederea pregătirii sesiunii iulie-august a examenului de

BACALAUREAT 2012 - M2

pentru candidații absolvenți ai liceelor din filiera tehnologică,
profil: servicii, resurse naturale şi protecția mediului, tehnic; toate specializările/calificările

MATEMATICĂ

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)

Argument:

Prezentul breviar teoretic are ca scop orientarea activităților de recapitulare a materiei la matematică, în vederea asigurării atingerii nivelului minim / mediu de competență şi nu reprezintă o listă exhaustivă. De asemenea, la aplicarea formulelor prezentate se va ține cont de însoțirea acestora de condiții de existență, funcție de mulțimile de numere pe care se aplică.

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
TEMA 2. Algebră clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)
TEMA 3. Analiză matematică clasa a XI-a (3h/săpt.), clasa a XII-a (3h/săpt.)

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
1.1.1. Mulțimi şi elemente de logică - clasa a IX-a (2h/săpt.)
1.1.2. Mulțimi de numere – clasa a X-a (3h/săpt.)
1.1.3. Şiruri – clasa a IX-a (2h/săpt.)

1.1.1. Mulțimi şi elemente de logică - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Mulțimi de numere: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$; proprietate $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; apartenența rezultatului unui calcul numeric la o mulțime dată (de exemplu: produsul a două numere nenule, unul rațional şi unul irațional, este un număr irațional).
Reguli de calcul cu numere reale vizând:

- asociativitatea: $a+(b+c)=(a+b)+c$; $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$
- comutativitatea: $a+b=b+a$; $a\cdot b=b\cdot a$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$
- elementul neutru: $a+0=0+a=a$; $a\cdot 1=1\cdot a=a$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$
- elemente simetrizabile: $a+(-a)=(-a)+a=0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$; $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$
- distributivitatea: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$
- alte proprietăți: $a\cdot 0=0\cdot a=0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$.

Ordonarea numerelor reale: $a<b$; proprietăți: $a<b\Leftrightarrow a\cdot x<b\cdot x$, $\forall x>0$; $a<b\Leftrightarrow a\cdot x>b\cdot x$, $\forall x<0$; $a<b\Leftrightarrow a+x<b+x$, $\forall x\in\mathbb{R}$; $a^2<b^2\Leftrightarrow |a|<|b|$; $a<b$ şi $b<c\Rightarrow a<c$ (tranzitivitate); $a\le b$ şi $a\ge b\Leftrightarrow a=b$ (antisimetrie).

Modulul unui număr real x : $|x|=\begin{cases}x, & x\ge 0\\ -x, & x<0\end{cases}$; proprietăți: $|x|\ge 0, \forall x\in\mathbb{R}$; $|x|=0\Leftrightarrow x=0$; $|-x|=|x|, \forall x\in\mathbb{R}$; $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$, $|x+y|\ge|x|+|y|$; $|x|=|y|\Rightarrow x=y$ sau $x=-y$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

Aproximări prin lipsă / adaos: de exemplu, utilizarea aproximărilor pentru încadrarea unui număr real între doi întregi consecutivi.

Intervale de numere reale: $(a,b)=\{x\in\mathbb{R} / a<x<b\}$; $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} / a\le x\le b\}$;

$(a,b]=\{x\in\mathbb{R} / a<x\le b\}$; $[a,b)=\{x\in\mathbb{R} / a\le x<b\}$; $(-\infty,b)=\{x\in\mathbb{R} / x<b\}$; $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} / a<x\}$; $(-\infty,b]=\{x\in\mathbb{R} / x\le b\}$; $[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R} / a\le x\}$.

Operații cu mulțimi de numere reale: reuniune $A\cup B=\{x / x\in A \text{ sau } x\in B\}$; intersecție $A\cap B=\{x / x\in A \text{ şi } x\in B\}$.

Operații logice elementare, cuantificatori, exemple:

- negația unei propoziții logice adevărate reprezintă o propoziție logică falsă;
- utilizarea conjuncției a două predicate în rezolvarea de sisteme;
- utilizarea disjuncției a două predicate în abordarea rezolvării unei probleme pe cazuri;
- utlizarea implicației sau echivalenței în elaborarea argumentării logice într-o demostrație.

1.1.2. Mulțimi de numere - clasa a X-a (3h/săpt.)

Puteri cu exponent întreg: $a^n=\underbrace{a......a}_{\text{de } n \text{ ori}}$ pentru $a\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}^*$, $a^0=1$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$ pentru $a\in\mathbb{R}^*, n\in\mathbb{N}$.

Proprietăți: $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$, $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$, $(ab)^m=a^m\cdot b^m$, $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$, $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$, cu aplicarea formulelor în condiții de bună definire.

Media aritmetică a numerelor reale $a_1,a_2,...,a_n$ este $m_a=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

Media artimetică ponderată a numerelor reale $a_1,a_2,...,a_n$, care au respectiv ponderile $p_1,p_2,...,p_n$, este $m_{ap}=\frac{a_1p_1+a_2p_2+...+a_np_n}{p_1+p_2+...+p_n}$.

Media geometrică a două numere reale pozitive a şi b este $m_g=\sqrt{a\cdot b}$.

Media armonică a două numere reale pozitive nenule a, b este $m_h=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Inegalitatea mediilor: $\min\{a;b\}\le\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{a\cdot b}\le\frac{a+b}{2}\le\max\{a;b\}$, unde a şi b sunt numere reale pozitive nenule

Radical de ordin 2 dintr-un număr real pozitiv: $\sqrt{a}, a\ge 0$; proprietăți: $\sqrt{a^2}=|a|, \forall a\in\mathbb{R}$; $\sqrt{a}\ge 0, \forall a\ge 0$; $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}, \forall a,b\ge 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \forall a\ge 0, \forall b>0$, $\left(\sqrt{a}\right)^m=\sqrt{a^m}=a^{\frac{m}{2}}$, $\forall a\ge 0, m\in\mathbb{N}^*$, raționalizarea numitorului: $\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}, \forall a>0$, $\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}, \forall a,b>0$.

Radical de ordin 3 dintr-un număr real: $\sqrt[3]{a}, a\in\mathbb{R}$; proprietăți: $\sqrt[3]{a^3}=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a, \forall a\in\mathbb{R}$; $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}, \forall a,b\in\mathbb{R}$; $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}, \forall a,b\in\mathbb{R}, b\ne 0$; $\left(\sqrt[3]{a}\right)^m=\sqrt[3]{a^m}=a^{\frac{m}{3}}, \forall a\in\mathbb{R}, m\in\mathbb{N}^*$.

Logaritmi: condiții de existență pentru $\log_a x$: $a>0, a\ne 1, x>0$; definiție: $\log_a x=y\Leftrightarrow x=a^y$; proprietăți: $\log_a a^x=x$; $a^{\log_a x}=x$; $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$; $\log_a\frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$; $\log_a x^m=m\log_a x$; cazuri particulare: $\log_a a=1$; $\log_a 1=0$; cu aplicarea formulelor în condiții de bună definire.

1.1.3. Şiruri – clasa a IX-a (2h/săpt.)

Notații: fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$; $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *şir de numere reale* cu termenii a_1 (primul termen, termenul de rang 1), a_2 (al doilea termen, termenul de rang 2), ..., a_n (termenul general) , ...; suma primilor n termeni ai şirului: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ...a_n$.

Şirul $\left(a_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o *progresie aritmetică* de rație $r \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + r$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (recurență);

$a_n = a_1 + (n-1)r$; $a_n = \dfrac{a_{n+1} + a_{n-1}}{2}$; $S_n = \dfrac{\left(a_1 + a_n\right)\cdot n}{2}$.

Şirul $\left(b_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este o *progresie geometrică* de rație q nenulă $\Leftrightarrow b_{n+1} = b_n \cdot q$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$ (recurență);

$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$; $b_n^2 = b_{n+1} \cdot b_{n-1}$; $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$ pentru $q \neq 1$.

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
1.2.1. Funcții, lecturi grafice - clasa a IX-a (2h/săpt.)
1.2.2. Funcția de gradul I - clasa a IX-a (2h/săpt.)
1.2.3. Funcția de gradul al II-lea - clasa a IX-a (2h/săpt.)
1.2.4. Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea – clasa a IX-a (2h/săpt.)

1.2.1. Funcții, lecturi grafice - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Reper cartezian, pereche de coordonate (x, y), x *abscisă*, y *ordonată*, *cadrane* I ($x > 0, y > 0$); II ($x < 0, y > 0$); III ($x < 0, y < 0$); IV($x > 0, y < 0$); axe de coordonate Ox şi Oy, $(x,0)$ punct de pe Ox ; $(0, y)$ punct de pe Oy ; $(0,0)$ originea reperului cartezian.
Modalități de a descrie o funcție: diagrame, tabele de valori, formule.
Lecturi grafice: determinarea monotoniei / intervalelor de monotonie, *intersecțiile reprezentării grafice a unei funcții numerice* $f : A \to B$ *cu axele de coordonate*: cu axa Ox - rezolvarea ecuației $f(x) = 0$, $x \in A$; cu axa Oy - punct de coordonate $(0, f(0))$, $0 \in A$; condiția ca un punct de coordonate (a,b) să aparțină reprezentării grafice a funcției $f : A \to B$ este $f(a) = b$, $a \in A$; rezolvarea grafică a ecuației $f(x) = g(x)$; *funcție pară:* $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$, unde A este o mulțime simetrică față de origine, *funcție impară:* $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$, unde A este o mulțime simetrică față de origine; *semnul funcției* (poziția reprezentării grafice față de axa Ox).

1.2.2. Funcția de gradul I - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Definiție: $f : A \to B$, $f(x) = ax + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$; dreapta de ecuație $y = ax + b$; *reprezentarea grafică a funcției*:

a) prin determinarea punctelor de intersecție cu axele de coordonate (intersecția cu axa absciselor: rezolvare ecuației $f(x) = 0$, intersecția cu axa ordonatelor: $f(0) = b$);
b) prin determinarea a două puncte distincte aparținând graficului: alegerea a două valori particulare ale abscisei, $x = a \Rightarrow A(a, f(a))$ şi $x = b \Rightarrow B(b, f(b))$.

Interpretarea grafică a proprietăților algebrice ale funcției:
Monotonia funcției de gradul I: discuție după semnul lui a, studiul tabelului de variație.
Semnul funcției de gradul I: tabelul de variație, rezolvarea ecuației $f(x) = 0$, dependența semnului funcției de semnul lui a.

Inecuații de forma $ax+b<0$ (≤, >, ≥), $a,b\in\mathbb{R}$; determinarea soluțiilor unei inecuații prin rezolvarea ecuației $f(x)=0$ şi folosirea semnului funcției.

Determinarea *poziției relative a două drepte*; rezolvarea sistemelor de tipul $\begin{cases} ax+by=c \\ mx+ny=p \end{cases}$, unde $a,b,c,m,n,p\in\mathbb{R}$; metoda reducerii, metoda substituției.

1.2.3. Funcția de gradul al II-lea - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Definiție: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax^2+bx+c$, unde $a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$; determinarea *valorii funcției într-un punct* x_0, prin calcularea lui $f(x_0)$; rezolvarea ecuației de gradul al doilea asociate: $ax^2+bx+c=0$, unde $a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, *discriminantul* ecuației $\Delta=b^2-4ac$, *numărul şi natura soluțiilor* în funcție de semnul lui Δ:

- $\Delta>0\Rightarrow$ soluții reale şi diferite, $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- $\Delta=0\Rightarrow$ soluții reale şi egale, $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$;
- $\Delta<0\Rightarrow$ nu există soluții reale.

Reprezentarea grafică prin puncte a funcției: *parabola*, prin determinarea elementelor caracteristice: intersecții cu axele de coordonate; coordonatele vârfului parabolei $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$; axa de simetrie $x=-\frac{b}{2a}$; orientarea parabolei în funcție de semnul coeficientului dominant a.

Relațiile lui Viète (relații dintre soluțiile x_1,x_2 şi coeficienții a,b,c): suma $S=x_1+x_2=-\frac{b}{2a}$, produsul $P=x_1x_2=\frac{c}{a}$; utilizarea relațiilor lui Viète pentru determinarea unei ecuații când se cunosc soluțiile: $x^2-Sx+P=0$; utilizarea relațiilor lui Viète pentru determinarea altor relații între soluțiile unei ecuații de gradul al doilea.

Rezolvarea sistemelor de forma $\begin{cases} x+y=S \\ xy=P \end{cases}$, unde $S,P\in\mathbb{R}$; metoda substituției sau utilizarea ecuației $t^2-St+P=0$.

1.2.4. Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al II-lea - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Monotonie, intervale de monotonie $I_1=\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right],\ I_2=\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$; discutarea monotoniei în funcție de semnul coeficientului dominant a; *punct de extrem* al reprezentării grafice a funcției (vârful parabolei), determinarea tipului de extrem (*minim/maxim*) în funcție de semnul coeficientului dominant a, determinarea punctului de extrem al funcției: calcularea abscisei $x_V=-\frac{b}{2a}$, determinarea extremului funcției prin calcularea expresiei $y_V=f\left(x_V\right)=-\frac{\Delta}{4a}$; interpretare geometrică.

Semnul funcției: tabelul de variație; utilizarea semnului funcției de gradul al doilea în rezolvarea *inecuațiilor* de forma $ax^2+bx+c\leq 0$ (≥, <, >), unde $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, interpretare geometrică.

Rezolvarea *sistemelor* de forma $\begin{cases} mx+n=y \\ ax^2+bx+c=y \end{cases}$, unde $m,n,a,b,c\in\mathbb{R}$; metoda substituției sau metoda grafică (utilizarea metodei grafice pentru determinarea numărului de puncte de intersecție dintre o dreaptă şi o parabolă).

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
1.3. Funcții şi ecuații – clasa a X-a (3h/săpt.)

Funcții elementare:

- *funcția putere*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}, n\geq 2$,
- *funcția radical de ordinul doi*: $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x}$,
- *funcția radical de ordinal trei*: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt[3]{x}$,
- *funcția exponențială*: $f:\mathbb{R}\to(0,+\infty), f(x)=a^x$, $a>0,\ a\neq 1$,
- *funcția logaritmică*: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1$;

identificarea domeniului de definiție, a codomeniului, calcularea valorilor acestor funcții în puncte particulare, utilizarea proprietăților de monotonie şi de semn, a intersecțiilor cu axele de coordonate în rezolvarea de probleme.
Studiul proprietăților unei funcții numerice $f:A\to B$:
→ *injectivitate*: f injectivă $\Leftrightarrow$ oricare ar fi $x,y\in A$, $f(x)=f(y)\Rightarrow x=y$; interpretare grafică
→ *surjectivitate*: f surjectivă $\Leftrightarrow$ oricare ar fi $y\in B$, există $x\in A$ astfel încât $y=f(x)$; interpretare grafică
→ *bijectivitate*: f bijectivă $\Leftrightarrow$ oricare ar fi $y\in B$, există un unic $x\in A$ astfel încât $y=f(x)$ $\Leftrightarrow$ f injectivă **şi** surjectivă; interpretare grafică.
Identificarea de contraexemple pentru argumentarea faptului că o funcție nu este injectivă / surjectivă / bijectivă.
→ *inversabilitate*: f inversabilă $\Leftrightarrow$ există o funcție $g:B\to A$ cu proprietățile $f(g(x))=x$, $\forall x\in B$ şi $g(f(x))=x$, $\forall x\in A$; condiția necesară şi suficientă ca o funcție să fie inversabilă: f inversabilă $\Leftrightarrow$ f bijectivă.
Identificarea şi utilizarea acestor proprietăți cu referire la funcțiile elementare enumerate anterior; interpretarea geometrică a inversabilității unei funcții (reprezentările grafice ale unei funcții şi ale inversei sale sunt simetrice față de prima bisectoare, dreapta de ecuație $y=x$).
Rezolvări de ecuații folosind proprietățile funcțiilor, în particular a proprietății de injectivitate.
Ecuații iraționale care conțin radicali de ordinul 2 sau 3:

- identificarea condițiilor de existență şi verificarea / explicitarea lor
- eliminarea radicalilor prin ridicarea la putere (ridicarea la pătrat presupunând verificarea faptului că membrii ecuației au acelaşi semn);
- utilizare proprietăților calculului cu radicali.

Ecuații exponențiale elementare:

- pentru $a>0,\ a\neq 1$, avem $a^{f(x)}=a^{f(y)}\Leftrightarrow f(x)=f(y)$
- pentru $a>0,\ a\neq 1,\ b>0$, avem $a^{f(x)}=b\Leftrightarrow f(x)=\log_a b$.

Ecuații logaritmice elementare:

- pentru $a>0,\ a\neq 1,\ a,\ b\in\mathbb{R}$ şi $f(x)>0$, avem $\log_a f(x)=b\Rightarrow f(x)=a^b$
- pentru $a>0,\ a\neq 1$, $f(x)>0$ şi $g(x)>0$, avem $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Rightarrow f(x)=g(x)$.

Utilizarea unor substituții care conduc la rezolvarea de ecuații algebrice (de exemplu, pentru rezolvarea unei ecuații de tipul $4^x-3\cdot 2^x+2=0$ se utilizează substituția $t=2^x>0$, care conduce la ecuația algebrică $t^2-3t+2=0$).
Rezolvarea unor probleme care pot fi modelate cu ajutorul ecuațiilor.

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
1.4.1. Metode de numărare – clasa a X-a (3h/săpt.)
1.4.2. Matematici financiare – clasa a X-a (3h/săpt.)

1.4.1. Metode de numărare – clasa a X-a (3h/săpt.)

Mulțimi finite ordonate (mulțimi în care contează ordinea scrierii elementelor).
Definiția *factorialului unui număr natural* $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, $0! = 1$; proprietate $n! = n \cdot (n-1)!$

Permutări – numărul de mulțimi ordonate cu *n* elemente, $n \in \mathbb{N}^*$, care se obțin prin ordonarea unei mulțimi finite cu *n* elemente; numărul permutărilor de *n* elemente, $n \in \mathbb{N}^*$, este $P_n = n!$; cazuri particulare $P_1 = 1! = 1, P_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2, P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.
Aranjamente – numărul submulțimilor ordonate cu câte *k* elemente care se pot forma cu elementele unei mulțimi finite cu *n* elemente, $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n$; numărul tuturor aranjamentelor de *n* elemente luate câte *k* este $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$; cazuri particulare $A_n^n = n! = P_n$, $A_n^0 = 1$.
Combinări – numărul submulțimilor cu câte *k* elemente care se pot forma cu elementele unei mulțimi finite cu *n* elemente, $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n$; numărul tuturor combinărilor de *n* elemente luate câte *k* este $C_n^k = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$; cazuri particulare $C_n^0 = C_n^n = 1$; $C_n^1 = C_n^{n-1} = n, n \ge 1$; $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}, n \ge 2$.
Proprietăți: *formula combinărilor complementare*: $C_n^k = C_n^{n-k}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n$; numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu *n* elemente este dat de formula $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$.
Elemente de combinatorică:
→ *formula de descompunere a combinărilor*: $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, oricare ar fi $n, k \in \mathbb{N}, 1 \le k \le n-1$;
→ *binomul lui Newton*: $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n a^0 b^n$; numărul de termeni ai dezvoltării binomului este $n+1$; *termenul general* (*de rang k+1*): $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$, $0 \le k \le n$; în raport cu dezvoltarea binomului lui Newton, C_n^k se numeşte *coeficient binomial*; determinarea unui termen/unor termeni cu anumite proprietăți; *sume combinatoriale* obținute prin particularizări ale binomului lui Newton: de exemplu, pentru $a = b = 1$ se obține $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ iar pentru $a = 1, b = -1$ se obține $C_n^0 - C_n^1 + ... + (-1)^n C_n^n = 0$.
Probabilitatea unui eveniment $P = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$.

1.4.2. Matematici financiare – clasa a X-a (3h/săpt.)

Elemente de *calcul financiar*:
→ determinarea unei necunoscute din relația $\dfrac{p}{100} \cdot a = b$;
→ asocierea formalismului matematic pentru o problemă ce implică *procente*: *b* reprezintă *p*% din $a \Leftrightarrow \dfrac{p}{100} \cdot a = b$ şi rezolvarea cerințelor de tipul: determinarea unui procent dintr-un număr; determinarea unui număr când se cunoaşte un procent din el; determinarea procentului pe care îl reprezintă un număr dat dintr-un alt număr dat.

Dobânda simplă: dobânda calculată pentru o sumă depusă, pe toată perioada depunerii, dată de formula: $D = S_i \cdot t \cdot \frac{p}{100}$, unde S_i reprezintă suma inițială depusă, pe o perioadă de *t* ani, cu un procent anual de dobândă egal cu p; în acest caz suma la finalul perioadei, S_f, este dată de formula $S_f = S_i + D$.

Dobânda compusă: dobânda calculată pentru o sumă depusă, pe toată perioada depunerii, dată de formula: $D = S_i \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$, unde S_i reprezintă suma inițială depusă, pe o perioadă de *t* ani (sau de perioade – lună, 3 luni, semestrial), cu un pocent de dobândă al perioadei egal cu p; în acest caz suma la finalul perioadei, S_f, este dată de formula $S_f = S_i + D$.

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
1.5.1. Vectori în plan clasa a IX-a (2h/săpt.)
1.5.2. Coliniaritate, concurență, paralelism - calcul vectorial în geometria plană clasa a IX-a (2h/săpt.)
1.5.3. Geometrie – clasa a X-a (3h/săpt.)

1.5.1. Vectori în plan - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Segment orientat, vectori, caracterizare: *direcție, sens, modul*.
Notații: $\overrightarrow{AB}$ vector cu originea A şi extremitatea B; direcția vectorului este dată de dreapta AB, sensul este determinat de parcurgerea dreptei dinspre A spre B, modulul vectorului este egal cu lungimea segmentului (AB); $\vec{v}$ vector liber (reprezentant al unei clase de vectori); modulul vectorului $\vec{v}$ se notează prin $|\vec{v}|$

Vectorul nul: $\vec{0}$ sau $\overrightarrow{AA}$.
Vectori egali: vectori care au aceeaşi direcție, acelaşi sens şi acelaşi modul; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow B = C$.
Vectori coliniari: vectori care au aceeaşi direcție.
Operații cu vectori:
1) *adunarea*: notație $\vec{u} + \vec{v}$, rezultatul este un vector ce poate fi determinat prin aplicarea regulii triunghiului sau a regulii paralelogramului; proprietăți: comutativitate, asociativitate, element neutru (vectorul nul $\vec{0}$), *vectori opuşi* (opusul vectorului $\vec{v}$ este vectorul $-\vec{v}$, care are aceeaşi direcție, sens opus şi acelaşi modul)
→ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, regula lui Chasles
→ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$
→ opusul vectorului $\overrightarrow{AB}$ este vectorul $\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$
→ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$
→ oricare ar fi punctul M avem $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$.
2) *înmulțirea cu scalari*: notație $\alpha \cdot \vec{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; rezultatul înmulțirii unui vector cu un scalar este tot un vector; astfel dacă $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{w}$ şi $\alpha \neq 0$, atunci avem următoarele proprietăți: $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ au aceeaşi direcție, au acelaşi sens dacă $\alpha > 0$, au sensuri opuse dacă $\alpha < 0$ şi relația dintre modulele celor doi vectori este $|\vec{w}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|$; dacă $\alpha = 1$, cei doi vectori sunt egali; dacă $\alpha = -1$, cei doi vectori sunt vectori opuşi.

1.5.2. Coliniaritate, concurență, paralelism - calcul vectorial în geometria plană - clasa a IX-a (2h/săpt.)

Condiții de *coliniaritate*:
→ dacă există $\alpha \neq 0$ astfel încât $\alpha \cdot \vec{v} = \vec{w}$, atunci $\vec{v}$ şi $\vec{w}$ sunt vectori coliniari
→ $\alpha \neq 0$ şi $\alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow A, B, C$ coliniare

→ $\alpha \neq 0$ şi $\alpha \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow$ segmentele (AB) şi (CD) sunt situate pe drepte paralele sau A, B, C, D coliniare

→ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ paralelogram (eventual degenerat)

Descompunerea după două direcții date de doi vectori necoliniari şi nenuli: fie $\vec{u}, \vec{v}$ vectori nenuli, atunci oricare ar fi vectorul $\vec{w}$ există scalarii $a, b \in \mathbb{R}$ (unici) astfel încât $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$.

Proprietăți:

→ în triunghiul ABC, dacă M este mijlocul segmentului (BC), atunci $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$

→ în triunghiul ABC, dacă G este centrul de greutate al triunghiului, atunci oricare ar fi punctul M avem $\overrightarrow{MG} = \dfrac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}}{3}$; caz particular $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

→ dacă $M \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{AM}{MB} = k \in \mathbb{R}_+^*$, atunci oricare ar fi punctul T, atunci $\overrightarrow{TM} = \dfrac{\overrightarrow{TA} + k \cdot \overrightarrow{TB}}{1+k}$.

1.5.3. Geometrie – clasa a X-a (3h/săpt.)

Reper cartezian în plan: xOy, coordonate carteziene în plan: (x, y);

Distanța dintre două puncte în plan: pentru $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$, avem $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$; *coordonatele mijlocului* $M(x_M, y_M)$ al *segmentului* (AB): $x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$; *coordonatele centrului de greutate* $G(x_G, y_G)$ al triunghiului ABC: $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_c}{3}; y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

Versorii axelor de coordonate: $\vec{i}$ versorul axei Ox, $\vec{j}$ versorul axei Oy.

Coordonatele unui vector $\vec{v}$ în plan: dacă $\vec{v} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$, atunci (a, b) reprezintă perechea (unică) de coordonate asociată vectorului $\vec{v}$.

Coordonatele sumei vectoriale: $\vec{v} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$ şi $\vec{u} = c \cdot \vec{i} + d \cdot \vec{j}$, atunci $\vec{v} + \vec{u} = (a+c) \cdot \vec{i} + (b+d) \cdot \vec{j}$.

Coordonatele produsului dintre un vector şi un număr real: dacă $\vec{v} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j}$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$, atunci $\alpha \cdot \vec{v} = (\alpha a) \cdot \vec{i} + (\alpha b) \cdot \vec{j}$.

Ecuația dreptei în plan determinată de un punct $A(x_A, y_A)$ şi de o direcție dată (panta m) $d: y - y_A = m(x - x_A)$.

Ecuația dreptei determinată de două puncte distincte $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$: $\dfrac{x - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_B - y_A}$, sau prin exprimarea (clasa a XI-a) cu ajutorul determinanților: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$; *panta dreptei* AB: $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ (pentru cazul $x_A \neq x_B$).

Ecuația generală carteziană implicită: $d: ax + by + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$.

Ecuația generală carteziană explicită: $y = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$.

Calcul de distanțe: distanța de la un punct $A(x_A, y_A)$ la dreapta d de ecuație $ax + by + c = 0$ $\text{dist}(A, d) = \dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Calcul de arii (clasa a XI-a): dacă $A_1A_2A_3$ este un triunghi cu vârfurile de coordonate $A_i(x_i, y_i)$, $i \in \{1,2,3\}$, atunci $\mathrm{A}_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} \cdot |\Delta|$, unde $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

Condiție de coliniaritate a trei puncte (clasa a XI-a): dacă $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$, atunci punctele A_1, A_2, A_3 sunt coliniare.

Condiții de paralelism:

→ *pentru două drepte oblice* $d_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $d_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ date prin *ecuații generale implicite*, avem:

- $d_1 = d_2$ dacă și numai dacă coeficienții sunt proporționali, adică $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
- $d_1 \parallel d_2$ dacă și numai dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

→ *pentru două drepte oblice* $d_1 : y = m_1x + n_1$, $d_2 : y = m_2x + n_2$ date prin *ecuații generale explicite*, avem:

- $d_1 = d_2$ dacă și numai dacă avem îndeplinită condițiile $m_1 = m_2$ (aceeași pantă) și $n_1 = n_2$ (aceeași ordonată la origine)
- $d_1 \parallel d_2$ dacă și numai dacă $m_1 = m_2$ (aceeași pantă).

TEMA 1. Algebră - Geometrie – Trigonometrie clasa a IX-a (2h/săpt.), clasa a X-a (3h/săpt.)
1.6. Aplicații ale trigonometriei în geometrie – clasa a IX-a (2h/săpt.)

Triunghiul dreptunghic, caracterizare: unghi drept, unghiuri ascuțite complementare, ipotenuză, catete
- *teorema lui Pitagora*: suma pătratelor lungimilor catetelor este egală cu pătratul lungimii ipotenuzei; cu notațiile: a lungimea ipotenuzei, b, c - lungimile catetelor, avem relația $a^2 = b^2 + c^2$
- *înălțimea* corespunzătoare ipotenuzei, h, se poate determina din formula $h = \frac{b \cdot c}{a}$ sau din teorema înălțimii
- *aria* este dată de formula $S = \frac{b \cdot c}{2}$
- *lungimea medianei* corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei
- dacă triunghiul dreptunghic are un unghi cu măsura de 30^o, atunci *lungimea catetei care se opune unghiului de* 30^o este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei
- *sinusul* unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este egal cu raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea ipotenuzei
- *cosinusul* unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este egal cu raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea ipotenuzei
- *tangenta* unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este egal cu raportul dintre lungimea catetei opuse și lungimea catetei alăturate
- *cotangenta* unui unghi ascuțit al triunghiului dreptunghic este egal cu raportul dintre lungimea catetei alăturate și lungimea catetei opuse.

Formule trigonometrice: $\sin(180^0 - x) = \sin x$; $\cos(180^0 - x) = -\cos x$.

Rezolvarea triunghiului, modalități de calcul a lungimii unui segment și a măsurii unui unghi:

→ cunoscându-se lungimile laturilor unui triunghi, se recomandă verificarea cazurilor particulare (triunghi isoscel sau dreptunghic), caz în care se pot utiliza proprietățile specifice unui astfel de triunghi pentru rezolvarea problemei.

→ cunoscându-se lungimile laturilor triunghiului (a, b, c), putem determina:

- aria triunghiului- formula lui Heron: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p=\frac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul triunghiului
- înălțimile, prin egalarea valorii obținute prin aplicarea formulei lui Heron cu expresia ariei folosind formulele $S=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}$;
- $\sin A, \sin B$ şi $\sin C$, din egalarea ariei cu expresia $S=\frac{ab\sin C}{2}=\frac{ac\sin B}{2}=\frac{bc\sin A}{2}$;
- raza cercului circumscris triunghiului, R, din egalarea ariei cu expresia $S=\frac{abc}{4R}$;
- raza cercului înscris în triunghi, r, din egalarea ariei cu expresia $S=p\cdot r$;
- $\cos A, \cos B$ şi $\cos C$, din aplicarea teoremei cosinusului: $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ şi $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$;

→ teorema sinusurilor: în orice triunghi ABC având laturile de lungimi a,b,c are loc relația $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

EXEMPLE DE ITEMI TIP EXAMEN DE BACALAUREAT PENTRU RECAPITULAREA NOȚIUNILOR DIN TEMA 1

EXEMPLUL 1

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Ordonați crescător numerele $\sqrt{12}, 2\sqrt{2}$ şi 3.
5p	**2.** Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \end{cases}$.
5p	**3.** Se consideră funcțiile $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\log_2(x+1)$ şi $g:\mathbb{R}\to(-1,+\infty)$, $g(x)=2^x-1$. Calculați $f(g(1))$.
5p	**4.** Numărul submulțimilor cu două elemente ale unei mulțimi este egal cu 10. Determinați numărul elementelor mulțimii.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0), A(5,1), B(3,5)$. Calculați lungimea medianei din vârful O în triunghiul OAB.
5p	**6.** Se consideră triunghiul MNP cu $MP=6$, $\sin N=\frac{3}{5}$ şi $\sin P=\frac{4}{5}$. Calculați lungimea laturii (MN).

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\sqrt{12}>3$ $2\sqrt{2}<3$ $2\sqrt{2}<3<\sqrt{12}$	**2p** **2p** **1p**
2.	x şi y sunt soluțiile ecuației $t^2-5t+6=0$ $t_1=2, t_2=3$ $S=\{(2,3),(3,2)\}$	**2p** **2p** **1p**
3.	$g(1)=1$ $f(g(1))=f(1)=1$	**2p** **3p**
4.	$C_n^2=10$ $n=5$	**2p** **3p**
5.	Fie M mijlocul segmentului $(AB)\Rightarrow M(4,3)$ $OM=5$	**2p** **3p**
6.	$\frac{MN}{\sin P}=\frac{MP}{\sin N}$ $MN=8$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 2

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $2^{-1}+2^{-2}=0,75$.
5p	**2.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\frac{2}{x-3}<0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+2}=x+2$.
5p	**4.** La o bancă a fost depusă într-un depozit suma de 900 lei cu o dobândă de $p\%$ pe an. Calculați p, ştiind că, după un an, în depozit suma este de 1008 lei.

5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$ şi $A(2,3)$. Determinați coordonatele punctului B, ştiind că A este mijlocul segmentului (OB).
5p	**6.** Determinați $x \in (0, 90^\circ)$ ştiind că $\frac{\sin x + 4\cos x}{\cos x} = 5$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$2^{-1} + 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$	**3p**
	$= \frac{1}{4} = 0,75$	**2p**
2.	$\frac{2}{x-3} < 0 \Leftrightarrow x - 3 < 0$	**3p**
	$x \in (-\infty, 3)$	**2p**
3.	Condiție: $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$	**1p**
	$x + 2 = x^2 + 4x + 4$	**2p**
	$x_1 = -2$ şi $x_2 = -1$	**2p**
4.	Dobânda obținută este $D = 1008 \text{ lei} - 900 \text{ lei} = 108 \text{ lei}$	**1p**
	$\frac{p}{100} \cdot 900 = 108$	**2p**
	$p = 12$	**2p**
5.	A este mijlocul segmentului $(OB) \Rightarrow x_B = 2x_A - x_O = 4$	**3p**
	$y_B = 2y_A - y_O = 6$	**2p**
6.	$\sin x + 4\cos x = 5\cos x$	**2p**
	$\sin x = \cos x$	**2p**
	$x = 45^\circ$	**1p**

EXEMPLUL 3

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_4 = 7$ şi $a_9 = 22$. Calculați a_{14}.
5p	**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - 3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = 5 - x$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{3-x} = \frac{1}{4}$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $M = \{0,1,2,3\}$.
5p	**5.** Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(3,0)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de punctul B.
5p	**6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, ştiind că $AB = 6$, $AC = 5$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 60^\circ$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_9 = a_4 + 5r \Rightarrow r = 3$	**2p**

	$a_{14} = a_9 + 5r = 37$	**3p**
2.	A este punctul de intersecție a graficelor funcțiilor f și g; $f(x) = g(x) \Rightarrow x - 3 = 5 - x$ $x - 3 = 5 - x \Rightarrow x_A = 4$ $y_A = 1$	**1p** **2p** **2p**
3.	$2^{3-x} = 2^{-2}$ $3 - x = -2 \Rightarrow x = 5$	**2p** **3p**
4.	A_4^3 este numărul de posibilități de alegere a numerelor de 3 cifre distincte din M A_3^2 este numărul de posibilități de alegere a numerelor de 2 cifre distincte nenule din M $A_4^3 - A_3^2 = 18$ numere	**2p** **2p** **1p**
5.	Fie C simetricul lui A față de $B \Rightarrow B$ este mijlocul segmentului (AC) $x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 5$ $y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow y_C = -2$	**1p** **2p** **2p**
6.	$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$ $BC = \sqrt{31}$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 4

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați $x \in \mathbb{Z}$ pentru care $-1 \le \frac{x+1}{3} \le 1$.

5p **2.** Determinați funcția de gradul al doilea al cărei grafic conține punctele $A(0,0), B(2,2), C(-1,2)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+3) - \log_2 x = 2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca alegând la întâmplare un element n din mulțimea $\{1,2,3,4\}$ acesta să verifice inegalitatea $2^n \ge n^2$.

5p **5.** În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,0), B(1,-1), O(0,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB = 6$ și $m(\sphericalangle ACB) = 30^\circ$.

Barem de evaluare și de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$-1 \le \frac{x+1}{3} \le 1 \Rightarrow -3 \le x + 1 \le 3$ $-4 \le x \le 2 \Rightarrow x \in [-4, 2]$ $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \{-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$	**2p** **2p** **1p**
2.	$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(2) = 2 \\ f(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ a - b + c = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} c = 0 \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - x$	**3p** **2p**

3.	Condiții $\begin{cases} x+3>0 \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(0,+\infty)$ $\log_2 \frac{x+3}{x}=2$ $x=1\in(0,+\infty)$	**1p** **2p** **2p**
4.	$p=\frac{\text{nr cazuri favorabile}}{\text{nr cazuri posibile}}$ Cazuri posibile sunt 4 Cazuri favorabile sunt 3 $p=\frac{3}{4}$	**1p** **1p** **2p** **1p**
5.	$2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=4\vec{i}+\vec{i}-\vec{j}=5\vec{i}-\vec{j}$ $C(5,-1)$	**3p** **2p**
6.	Din teorema sinusului $\frac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=\frac{AB}{2\sin C}$ $R=\frac{6}{2\cdot\frac{1}{2}}=6$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 5

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=mx^2+2x-5$. Determinați $m\in\mathbb{R}$ pentru care abscisa vârfului parabolei asociate funcției *f* este egală cu 2.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{1-x^2}=\frac{1}{27}$.
5p	**4.** Calculați $C_6^2-A_4^2$.
5p	**5.** În sistemul de coordinate *xOy* se consideră punctele $O(0,0)$, $A(2,-2)$ și $B(6,8)$. Calculați distanța de la punctul *O* la mijlocul segmentului (AB).
5p	**6.** Calculați $\cos 130^\circ+\cos 50^\circ$.

Barem de evaluare și de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\left(3+\sqrt{5}\right)+\log_2\left(3-\sqrt{5}\right)=\log_2(9-5)=$ $=\log_2 4=2$	**3p** **2p**
2.	$-\frac{b}{2a}=2$ $-\frac{2}{2m}=2$ $m=-\frac{1}{2}$	**2p** **2p** **1p**

3.	$3^{1-x^2}=3^{-3}\Rightarrow 1-x^2=-3$ $x^2=4\Rightarrow x\in\{2,-2\}$	**3p** **2p**
4.	$C_6^2=\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}=15$ $A_4^2=\dfrac{4!}{(4-2)!}=12$ $C_6^2-A_4^2=3$	**2p** **2p** **1p**
5.	Dacă C este mijlocul lui $(AB)\Rightarrow C(4,3)$ $OC=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}$ $OC=5$	**2p** **2p** **1p**
6.	$\cos(\pi-x)=-\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$ $\cos 130^\circ+\cos 50^\circ=0$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 6

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_2\frac{1}{8}+\sqrt[3]{27}$.
5p	**2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-2x+3$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2-3^{x^2-1}=1$.
5p	**4.** Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{1,2,3,4\}$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1}=2\vec{i}-\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=\vec{i}+3\vec{j}$. Determinați coordonatele vectorului $\vec{w}=2\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}$.
5p	**6.** Un triunghi dreptunghic are catetele $AB=3,\ AC=4$. Determinați lungimea înălțimii duse din *A*.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\log_2\frac{1}{8}=\log_2 2^{-3}=-3$ $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ $\log_2\frac{1}{8}+\sqrt[3]{27}=0$	**2p** **2p** **1p**
2.	$x_V=-\dfrac{b}{2a}=1$ $y_V=-\dfrac{\Delta}{4a}=2$ $V(1,2)$	**2p** **2p** **1p**
3.	$3^{x^2-1}=1$ $x^2-1=0$ $x\in\{-1,1\}$	**1p** **2p** **2p**
4.	$A_4^3=$ $=24$	**2p** **3p**

5.	$\vec{w}=2\left(2\vec{i}-\vec{j}\right)-\left(\vec{i}+3\vec{j}\right)=$ $=3\vec{i}-5\vec{j}\Rightarrow\vec{w}\left(3,-5\right)$	**2p** **3p**
6.	$BC=5$ $h=\dfrac{AB\cdot AC}{BC}=\dfrac{12}{5}$	**2p** **3p**

EXEMPLUL 7

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră o progresie aritmetică $\left(a_n\right)_{n\geq1}$ în care $a_3=5$ şi $a_5=11$. Calculaţi suma primilor şapte termeni ai progresiei.
5p	**2.** Se consideră funcţiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\left(x\right)=2x-1$, $g\left(x\right)=x+3$. Determinaţi coordonatele punctului de intersecţie a graficelor funcţiilor *f* şi *g*.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt[3]{x^2-1}=2$.
5p	**4.** Calculaţi $a\cdot b$ ştiind că $a+b=150$ şi numărul *a* reprezintă 25% din numărul *b*.
5p	**5.** Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care punctele $A\left(2,3\right)$, $B\left(4,5\right)$ şi $C\left(m+1,m^2\right)$ sunt coliniare.
5p	**6.** Calculaţi $\cos x$, ştiind că $\sin x=\dfrac{1}{3}$ şi $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\begin{cases}a_1+2r=5\\a_1+4r=11\end{cases}\Rightarrow a_1=-1,\ r=3$ $a_7=a_1+6r=17$, $S_7=56$	**3p** **2p**
2.	$f\left(x\right)=g\left(x\right)\Rightarrow 2x-1=x+3$ $x=4$ şi $y=7$ $A\left(4,7\right)$	**2p** **2p** **1p**
3.	Prin ridicare la puterea a 3-a se obține $x^2-1=8$ $x=\pm3$	**1p** **2p** **2p**
4.	$a+b=150\Rightarrow\dfrac{b}{4}+b=150\Rightarrow b=120$ $a=30$ $a\cdot b=3600$	**3p** **1p** **1p**
5.	$AB:\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-3}{2}\Rightarrow x-y+1=0$ $C\in AB\Rightarrow m^2-m-2=0$ $m=-1$ sau $m=2$	**2p** **2p** **1p**
6.	$\sin^2x+\cos^2x=1\Rightarrow\cos x=\pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\Rightarrow\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 8

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\ge 1}$ se cunosc $a_2 = 6$ şi $a_3 = 5$. Calculați a_6.
5p	**2.** Determinați soluțiile întregi ale inecuației $2x^2 - x - 3 \le 0$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+2) - \log_3(x-4) = 1$.
5p	**4.** După o scumpire cu 5%, prețul unui produs creşte cu 12 lei. Calculați prețul produsului înainte de scumpire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$ şi $B(5,0)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.
5p	**6.** Calculați raza cercului circumscris triunghiului ABC ştiind că $BC = 9$ şi $m(\sphericalangle BAC) = 120^\circ$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\begin{cases} a_2 = 6 \\ a_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 7 \\ r = -1 \end{cases}$	**2p**
	$a_6 = a_1 + 5r$	**2p**
	$a_6 = 2$	**1p**
2.	$2x^2 - x - 3 \le 0 \Rightarrow x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$	**3p**
	$x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -1, x = 0, x = 1$	**2p**
3.	Condiții de existență $\begin{cases} x+2>0 \\ x-4>0 \end{cases} \Rightarrow x \in (4, +\infty)$	**1p**
	$\log_3\left(\frac{x+2}{x-4}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x-4} = 3$	**2p**
	$x = 7 \in (4, +\infty)$	**2p**
4.	Se notează cu x prețul inițial	
	$5\% \cdot x = 12$ lei	**3p**
	$x = 240$ lei	**2p**
5.	Se notează cu M mijlocul lui $[AB]$ şi cu d mediatoarea segmentului $[AB]$; atunci $M(3,2)$	**1p**
	$m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = 1$	**2p**
	$d: y - 2 = 1\cdot(x-3) \Rightarrow d: y = x - 1$	**2p**
6.	Din teorema sinusului $\Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A}$	**2p**
	$\sin A = \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	**2p**
	$R = 3\sqrt{3}$	**1p**

EXEMPLUL 9

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați $\log_6 3 + \log_6 12$.
5p	**2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x + 3$.

5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $7^x + 7^{x+1} = 392$.
5p	**4.** Determinați $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pentru care $C_n^2 = 4A_n^1$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,-2)$ și $B(4,m)$, unde $m \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui m pentru care $AB = 5$.
5p	**6.** Calculați $\cos 40^\circ + \cos 140^\circ$.

Barem de evaluare și de notare

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\log_6 3 + \log_6 12 = \log_6 36$ $\log_6 36 = \log_6 6^2 = 2$	**3p** **2p**
2.	$x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}$ $\Delta = -23$ $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{23}{8}$	**2p** **1p** **2p**
3.	$7^x + 7^{x+1} = 392 \Leftrightarrow 7^x + 7^x \cdot 7 = 392$ $7^x \cdot 8 = 392 \Leftrightarrow 7^x = 49$ $x = 2$	**1p** **2p** **2p**
4.	$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 4\frac{n!}{(n-1)!}$ $\frac{n-1}{2} = 4$ $n = 9$	**2p** **2p** **1p**
5.	$\sqrt{(4-0)^2 + (m+2)^2} = 5$ $m^2 + 4m - 5 = 0$ $m = -5, m = 1$	**1p** **2p** **2p**
6.	$\cos 140^\circ = \cos(180^\circ - 40^\circ) = -\cos 40^\circ$ $\cos 40^\circ + \cos 140^\circ = 0$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 10

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați $x \in \mathbb{R}$ pentru care numerele $x-1$, $x+1$ și $3x-1$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5 - x$. Calculați $f(0) \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot \ldots \cdot f(10)$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-1} = x - 3$.
5p	**4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu 2 elemente ale unei mulțimi cu 7 elemente.
5p	**5.** Calculați distanța de la punctul $A(2,3)$ la punctul de intersecție a dreptelor $d_1 : 2x - y - 6 = 0$ și $d_2 : -x + 2y - 6 = 0$.
5p	**6.** Calculați cosinusul unghiului M al triunghiului MNP știind că $MN = 4$, $MP = 5$ și $NP = 6$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$2(x+1)=x-1+3x-1$ $2x=4\Rightarrow x=2$	**2p** **3p**
2.	$f(5)=0$ $f(0)\cdot f(1)\cdot f(2)\cdot\ldots\cdot f(10)=0$	**3p** **2p**
3.	Condiții $\begin{cases}x-1\geq 0\\x-3\geq 0\end{cases}\Rightarrow x\in[3,+\infty)$ $x-1=(x-3)^2\Rightarrow x^2-7x+10=0$ $x=2$ sau $x=5$ $2\notin[3,+\infty)\Rightarrow x=5$	**1p** **2p** **1p** **1p**
4.	Numărul de submulțimi ordonate este A_7^2 $A_7^2=\dfrac{7!}{5!}=42$	**2p** **3p**
5.	$\begin{cases}2x-y-6=0\\-x+2y-6=0\end{cases}\Rightarrow x=y=6$ $d=\sqrt{(6-2)^2+(6-3)^2}$ $d=5$	**2p** **2p** **1p**
6.	$\cos M=\dfrac{MN^2+MP^2-NP^2}{2\cdot MN\cdot MP}$ $\cos M=\dfrac{1}{8}$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 11

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați $\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax+b$. Determinați numerele reale a şi b pentru care graficul funcției f conține punctele $A(2,3)$ şi $B(-1,0)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}=36$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr de 2 cifre, acesta să fie divizibil cu 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,-1)$ şi $N(-1,3)$. Determinați coordonatele vectorului $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$.

5p **6.** Determinați lungimea laturii unui triunghi echilateral, care are aria egală cu $4\sqrt{3}$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **30 de puncte**

1.	$\log_7\left(3+\sqrt{2}\right)+\log_7\left(3-\sqrt{2}\right)=\log_7\left[\left(3+\sqrt{2}\right)\cdot\left(3-\sqrt{2}\right)\right]=$ $=\log_7 7=1$	**3p** **2p**

2.	$A(2,3)\in G_f \Rightarrow f(2)=3\Rightarrow 4+2a+b=3$ $B(-1,0)\in G_f \Rightarrow f(-1)=0\Rightarrow 1-a+b=0$ $a=0,b=-1$	**2p** **2p** **1p**
3.	$3^x+3\cdot 3^x=36$ $3^x=9$ $x=2$	**1p** **2p** **2p**
4.	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$ Numerele divizibile cu 4: 12, 16,…,96 $\Rightarrow$ 22 cazuri favorabile Numerele de 2 cifre: $\overline{ab}, a\in\{1,2,...,9\}, b\in\{0,1,2,...,9\}\Rightarrow 90$ cazuri posibile $p=\dfrac{22}{90}=\dfrac{11}{45}$	**1p** **2p** **1p** **1p**
5.	$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\vec{i}-\vec{j}-\vec{i}+3\vec{j}=\vec{i}+2\vec{j}$ Coordonatele sunt $(1,2)$	**3p** **2p**
6.	$\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}=4\sqrt{3}$ $l=4$	**3p** **2p**

EXEMPLUL 12

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\ge1}$ se cunosc $a_1=5$ şi $r=2$. Calculați suma primilor 5 termeni ai progresiei.
5p	**2.** Determinați numărul real *m* pentru care ecuația $x^2-(m+1)x+m=0$ are soluții reale egale.
5p	**3.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=2^{x+1}-1$ cu axele *Ox* şi respectiv *Oy*.
5p	**4.** Calculați $2C_4^2-3A_4^1$.
5p	**5.** Se consideră vectorii $\overrightarrow{v_1}=2\vec{i}+a\vec{j}$ şi $\overrightarrow{v_2}=(a+3)\vec{i}+2\vec{j}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Determinați numărul $a>0$ pentru care vectorii $\overrightarrow{v_1}$ şi $\overrightarrow{v_2}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Aria triunghiului *MNP* este egală cu 16, iar $MN=NP=8$. Calculați $\sin N$.

Barem de evaluare şi de notare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$S_5=\dfrac{(2a_1+4r)\cdot 5}{2}$ $S_5=45$	**3p** **2p**
2.	$\Delta=0$ $m^2+2m+1-4m=0$ $m=1$	**1p** **2p** **2p**

3.	$G_f \cap Ox : f(x) = 0 \Rightarrow x = -1$	**2p**
	$A(-1,0)$	**1p**
	$G_f \cap Oy : f(0) = 1$	**1p**
	$B(0,1)$	**1p**
4.	$C_4^2 = 6$	**2p**
	$A_4^1 = 4$	**2p**
	$2C_4^2 - 3A_4^1 = 0$	**1p**
5.	$\frac{2}{a+3} = \frac{a}{2}$	**2p**
	$a^2 + 3a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1$ sau $a = -4$	**2p**
	$a > 0 \Rightarrow a = 1$	**1p**
6.	Aria $\Delta MNP = \frac{MN \cdot NP \cdot \sin N}{2}$	**2p**
	$\sin N = \frac{2 \cdot 16}{8 \cdot 8}$	**2p**
	$\sin N = \frac{1}{2}$	**1p**