MODALITĂŢI DE INTRODUCERE A UNOR TEME DE RECAPITULARE PORNIND DE LA ITEMI PROPUŞI ÎN EVALUĂRILE NAŢIONALE DIN ANII PRECEDENŢI PENTRU ABSOLVENŢII CLASEI A VIII-A

Autori:
Prof. Liliana TODERIUC – ŞCOALA GIMNAZIALA NR.79
Prof. Ovidiu ŞONTEA –COLEGIUL NAŢIONAL DE INFORMATICĂ "TUDOR VIANU"
Prof. Gabriel VRÎNCEANU –COLEGIUL NAŢIONAL "SPIRU HARET"

REZUMAT:

Prezentul material îşi propune prezentarea unor itemi conţinuţi în modelele de subiecte asociate Evaluării Naţionale postate de MECTS în anii precedenți.

Accentul este pus pe evidenţierea:

→ competenţelor specifice necesare rezolvării problemelor;
→ identificarea contextului teoretic/aplicativ/listă de cuvinte cheie;
→ corelarea cerinţelor cu un nivel de dificultate;
→ însoţirea rezolvării de explicaţii şi observaţii;
→ prezentarea suportului teoretic al cerinţelor propuse spre rezolvare;
→ prezentarea unor cerinţe similare sau conexe contextului pus în discuţie.

În realizarea materialului de faţă, s-au utilizat următoarele surse bibliografice:

→ materialul elaborat de Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare (CNEE) privind **Evaluarea Naţională pentru elevii clasei a VIII-a, în anul scolar 2010-2011, la disciplina Matematică; www.edu.ro; (1)**
→ model de subiect propus de CNEE pentru anul şcolar 2011-2012; **www.edu.ro. (2)**

INTRODUCERE:

Evaluarea Naţională pentru elevii clasei a VIII-a este un ***examen naţional*** şi reprezintă modalitatea de ***evaluare externă*** sumativă a competenţelor dobândite pe parcursul învăţământului gimnazial.

În cadrul Evaluării Naţionale pentru elevii clasei a VIII-a, *Matematica* are statut de ***disciplină obligatorie***.

Competenţe de evaluat la disciplina *Matematică*

Proba scrisă la disciplina *Matematică*, susţinută în cadrul examenului de Evaluare Naţională, evaluează competenţe dezvoltate pe parcursul învăţământului gimnazial, în conformitate cu programele scolare pentru clasele a V-a - a VIII-a, în vigoare.

Competenţele de evaluat, asociate conţinuturilor programei pentru examenul de Evaluare Naţională, în cadrul probei scrise la *Matematică* sunt (1):

1. Utilizarea noţiunii de număr real şi a relaţiilor dintre mulţimile de numere studiate
2. Identificarea proprietăţilor operaţiilor cu numere reale
3. Aplicarea operaţiilor cu numere reale în calcule variate
4. Analizarea unor situaţii practice cu ajutorul rapoartelor, procentelor, proporţiilor
5. Identificarea unor probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor, inecuaţiilor sau a sistemelor de ecuaţii, rezolvarea acestora şi interpretarea rezultatului obţinut
6. Aplicarea în rezolvarea problemelor a elementelor de logică şi de teoria mulţimilor
7. Utilizarea elementelor de calcul algebric
8. Alegerea metodei adecvate de rezolvare a problemelor în care intervin dependenţe funcţionale sau calculul probabilităţilor
9. Aplicarea teoriei specifice funcţiei de forma , : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$

10. Utilizarea proprietăţilor figurilor geometrice şi a corpurilor geometrice în probleme de demonstraţie şi de calcul
11. Reprezentarea, prin desen, a unor figuri geometrice şi a unor corpuri geometrice utilizând instrumente geometrice
12. Transpunerea în limbaj matematic a enunţului unei situaţii-problemă
13. Analizarea şi interpretarea rezultatelor obţinute prin rezolvarea unei probleme practice cu referire la figurile geometrice şi la unităţele de măsură
14. Investigarea valorii de adevăr a unor enunţuri şi construirea unor generalizări
15. Redactarea coerentă şi completă a soluţiei unei probleme

Prezentăm în continuare 4 teme de recapitulare, pornind de la itemi propuşi în prima parte a subiectului de examen[2].

1. Rezultatul calculului $10-10:5$ **este egal cu ….**

Competenţe de evaluat:	Context teoretic/aplicativ:	Nivel de dificultate:
→ Identificarea proprietăţilor operaţiilor cu numere reale → Aplicarea operaţiilor cu numere reale în calcule variate	→ calcul numeric; → numere întregi; → operaţii cu numere întregi; → ordinea operaţiilor; → efectuarea corectă a operaţiilor.	→ elementar

Rezolvare:

$$10-\underbrace{10:5}_{prioritate!}=10-2=8.$$

Observaţii:
→ într-un calcul fără paranteze, identificăm **tipurile** de operaţii şi asociem un **ordin** acestora; ordinul ne precizează care dintre operaţii au întâietate în calcul;
→ ca tipuri, în calculul numeric curent avem: **adunare, scădere, înmulţire, împărţire, ridicare la putere, radicali**.
→ ca ordin asociat unei operaţii avem:

Ordinul III:	Ordinul II:	Ordinul I
→ ridicare la putere	**→ înmulţire** **→ împărţire**	**→ adunare** **→ scădere**

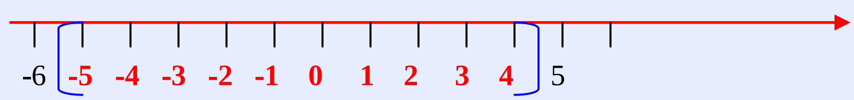
→ se vor efectua întâi operaţiile de ordinul III, apoi cele de ordinul II, în final cele de ordinul I;
→ în cazul de faţă, identificăm două operaţii: **scăderea** (adunarea cu opus!) şi **împărţirea** (înmulţirea cu inversul unui număr nenul);
→ în cazul calculului cu paranteze, prioritate are efectuarea calculului din paranteză.

Variante:
a) $(10-10):5=$ ______________________________;
b) $10-10:(-5)=$ ______________________________;
c) $-10-10:5=$ ______________________________.

2. Câte numere întregi sunt în intervalul $\left[-5,4\right]$?

Competenţe de evaluat:	Context teoretic/aplicativ:	Nivel de dificultate:
→ Utilizarea noţiunii de număr real şi a relaţiilor dintre mulţimile de numere studiate → Identificarea proprietăţilor operaţiilor cu numere reale → Aplicarea în rezolvarea problemelor a elementelor de logică şi de teoria mulţimilor	→ numere întregi; → interval de numere reale; → relaţia de apartenenţă a unui element la o mulţime dată; → interpretarea unei condiţii/set de condiţii date; → dublă inegalitate → determinarea numărului de elemente ale unei mulţimi (cardinalul mulţimilor)	→ elementar

Rezolvare 1:
Pornind de la faptul că între orice două numere reale date se află un număr finit de numere întregi, în acest caz enumerăm toate numerele întregi mai mari sau egale cu -5 şi mai mici sau egale cu 4; putem folosi axa numerelor reale pentru a le reprezenta:



Rezultă că avem exact 10 numere întregi cu proprietatea de a aparţine intervalului $[-5,4]$.

Rezolvare 2:
Notăm prin x un element care satisface condiţiile problemei .
Ipoteza 1: $x \in \mathbb{Z}$;
Ipoteza 2: $x \in [-5,4]$;
Ipoteza 3: condiţiile anterioare trebuie îndeplinite în acelaşi timp (operatorul logic "şi").
Din corelarea datelor, rezultă $x \in [-5,4] \cap \mathbb{Z}$.
Pornind de la definirea intervalelor de numere reale, ipoteza 2 se rescrie ca dubla inegalitate:

$$-5 \le x \le 4$$

Cum $x \in \mathbb{Z}$, extragem din dubla inegalitate valorile întregi negative: $-5,-4,-3,-2$ şi -1, valorile întregi strict pozitive $1,2,3$ şi 4, la care se adaugă şi numărul 0.
În total avem $5+1+4=10$ numere întregi care verifică.
Răspuns: numărul de elemente x care verifică $x \in [-5,4] \cap \mathbb{Z}$ este egal cu 10.

Observaţii:
→ **notaţiile** pentru mulţimile de numere studiate în gimnaziu:

Notaţie	Relaţia de incluziune	Denumire	Exemple de numere şi operaţii care au ca rezultat numere din mulţimea dată
$\mathbb{N}$		Mulţimea numerelor naturale	$5;0;\frac{4}{2};2^3;\sqrt{9};\lvert-6\rvert;....$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$	Mulţimea numerelor întregi	$\pm5;0;\pm\frac{4}{2};\pm2^3;\pm\sqrt{9};\pm\lvert-6\rvert;....$

Notaţie	Relaţia de incluziune	Denumire	Exemple de numere şi operaţii care au ca rezultat numere din mulţimea dată
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$	Mulţimea numerelor raţionale	1) fracţii ordinare: $\frac{1}{2};\frac{3}{3};-\frac{7}{5};....;$ 2) a) fracţii zecimale finite: $3,5;\ 2,43;$ -5,207; 0,001;... Obs: $5=5,00000...$ b) fracţii zecimale periodice simple: $2,(3);$ 4,(029); 0,(03); -1,(123); .... c) fracţii zecimale periodice mixte: $1,24(3);$ 4,0(29); 0,1(03); -1,31(123); ....
$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$		Mulţimea numerelor iraţionale	a) $\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{1,3}$ ....., dar nu orice radical (de exemplu $\sqrt{1,21}=\sqrt{\frac{121}{100}}=\frac{\sqrt{121}}{\sqrt{100}}=\frac{11}{10}=1,1\in\mathbb{Q}$)→ iraţionale algebrice; b) $\pi;2\pi;....$→ iraţionale transcendente
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$	Mulţimea numerelor reale	Orice număr descris anterior.

→ dacă $a,b\in\mathbb{Z}$ cu condiţia $a<0<b$, atunci numărul de elemente ale intersecţiei $[a,b]\cap\mathbb{Z}$ este egal cu $|a|+b+1=b-a+1$;

→ dacă $a,b\in\mathbb{Z}$ cu condiţia $a<0<b$, atunci numărul de elemente ale intersecţiei $(a,b]\cap\mathbb{Z}$ este egal cu $|a|+b=b-a$;

→ dacă $a,b\in\mathbb{Z}$ cu condiţia $a<0<b$, atunci numărul de elemente ale intersecţiei $(a,b)\cap\mathbb{Z}$ este egal cu $|a|+b-1=b-a-1$.

Reamintim:

→ dacă $a,b\in\mathbb{R}$ cu condiţia $a\le b$, atunci $[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x\le b\}$ → segment închis la ambele capete;

→ dacă $a,b\in\mathbb{R}$ cu condiţia $a<b$, atunci $(a,b]=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\le b\}$ → segment deschis la stânga, închis la dreapta;

→ dacă $a,b\in\mathbb{R}$ cu condiţia $a<b$, atunci $[a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a\le x<b\}$ → segment închis la stânga, deschis la dreapta;

→ dacă $a,b\in\mathbb{R}$ cu condiţia $a<b$, atunci $(a,b)=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x<b\}$ → segment deschis la ambele capete;

→ dacă $a\in\mathbb{R}$, atunci $(-\infty,a)=\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$ → semidreaptă de capăt deschis;

→ dacă $a\in\mathbb{R}$, atunci $(-\infty,a]=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le a\}$ → semidreaptă cu capăt închis;

→ dacă $a\in\mathbb{R}$, atunci $(a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x>a\}$ → semidreaptă cu capăt deschis;

→ dacă $a\in\mathbb{R}$, atunci $[a,+\infty)=\{x\in\mathbb{R}\mid x\ge a\}$ → semidreaptă cu capăt închis;

→ $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ → dreaptă.

Variante: Determinaţi numărul de elemente ale intersecţiilor:

a) $(-5,4]\cap\mathbb{Z}=$ ____;

b) $(-5,4)\cap\mathbb{Z}=$ ____;

c) $(-\infty,2)\cap\mathbb{N}=$ ____.

3. Cincizeci de kilograme de castraveţi costă 200 lei. Cinci kilograme de castraveţi de aceeasi calitate costă ... lei.

Competenţe de evaluat:	Context teoretic/aplicativ:	Nivel de dificultate:
→ Analizarea unor situaţii practice cu ajutorul rapoartelor, proporţiilor → Identificarea unor probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuaţiilor, rezolvarea acestora şi interpretarea rezultatului obţinut → Redactarea coerentă şi completă a soluţiei unei probleme	→ identificarea cunoscutelor → identificare şi notarea necunoscutelor; → scrierea/formalizarea relaţiilor dintre datele problemei; → regula de 3 simplă; → calcul numeric; → calcul algebric → operaţii cu numere întregi; → efectuarea corectă a operaţiilor; → obţinerea soluţiei şi interpretarea în raport cu contextul practic al problemei	→ elementar

Rezolvare:

Tipuri de date: număr de kilograme, costuri;

Necunoscuta problemei: notăm x - costul (în lei) asociat celor 5 kg.

Metoda 1: reducerea la unitate

Din ipoteza **"Cincizeci de kilograme de castraveţi costă 200 lei."**, putem obţine costul unui kg:

$$\frac{20\cancel{0}\ \text{(lei)}}{5\cancel{0}\ \text{(kg)}}=\frac{20\ \text{(lei)}}{5\ \text{(kg)}}=4\ \text{lei/kg}.$$

Cunoscând costul unui kilogram putem determina costul celor 5 kg:

$x=5\ \text{(kg)}\cdot 4\ \text{(lei/kg)}=20\ \text{lei}$ **.**

Concluzie: costul celor 5 kg de castraveţi este egal cu 20 de lei.

Metoda 2: regula de 3 simplă

50 kg..200 lei **(proporţionalitate directă)**

5 kg..x lei

Relaţia asociată: $50\cdot x=5\cdot 200$ sau $\frac{50}{5}=\frac{200}{x}$ **. (ecuaţii în ecunoscuta** x**).**

Prelucrăm relaţia: $50\cdot x=5\cdot 200$ astfel:

→ Efectuăm calculul din membrul drept: $5\cdot 200=1000$;

→ $50\cdot x=1000 \mid :50$ (împărţim ambii membri ai ecuaţiei la 50);

→ $\frac{50\cdot x}{50}=\frac{1000}{50}$ implică $x=20$.

Prelucrăm relaţia $\frac{50}{5}=\frac{200}{x}$ (**proporţie**), aplicând:

→ sau **proprietatea fundamentală a proporţiilor (produsul extremilor este egal cu produsul mezilor)** şi obţinem $50\cdot x=5\cdot 200$**;**

→ sau **aflarea termenului necunoscut dintr-o proporţie:** în acest caz, necunoscuta este pe poziţie de extrem, deci este egală cu raportul dintre produsul mezilor şi celălalt extrem:

$$x=\frac{5\cdot 200\ \text{(produsul mezilor)}}{50\ \text{(extrem)}}$$

→ se obţine în final $x=\frac{1000}{50}=20$ (lei).

Observaţii:

→ **Cadrul general** al unei astfel de probleme conduce la:

a) proporţionlitate directă:

a .... A

b .... B deci $\frac{a}{b}=\frac{A}{B}$

b) proporţionalitate inversă:

a .... A

b .... B deci $a\cdot A=b\cdot B$

→ o proporţie este o scriere de tipul $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; termenii a şi d se numesc extremi, termenii b şi c se numesc mezi;

→ proprietatea fundamentală a proporţiilor: $a\cdot d=b\cdot c$ (produsul extremilor este egal cu produsul mezilor);

→ aflarea unui termen necunoscut dintr-o proporţie se poate situa într-unul din cazurile:

$\frac{x}{b}=\frac{c}{d}$, deci x este extrem şi rezultă $x=\frac{b\cdot c}{d}$;

$\frac{a}{x}=\frac{c}{d}$, deci x este mez şi rezultă $x=\frac{a\cdot d}{c}$;

$\frac{a}{b}=\frac{x}{d}$, deci x este mez şi rezultă $x=\frac{a\cdot d}{b}$;

$\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, deci x este extrem şi rezultă $x=\frac{b\cdot c}{a}$.

Variante:

a) Cincizeci de kilograme de castraveţi costă 300 lei. 15 kilograme de castraveţi de aceeasi calitate costă ... lei.

b) Câte kilograme de castraveţi vor costa 200 lei dacă cinci kilograme de castraveţi de aceeasi calitate costă 12 lei.

c) Cincizeci de kilograme de castraveţi costă 200 lei. Câte kilograme de castraveţi de aceeasi calitate costă 25 lei..

d) Cât costă cincizeci de kilograme de castraveţi, dacă cinci kilograme de castraveţi de aceeasi calitate costă 18 lei.

4. Numărul elevilor dintr-un lot de atletism si vârstele lor sunt reprezentate în tabelul de mai jos.

Vârstă (ani)	11	12	13	14
Număr de elevi	9	4	5	2

Numărul elevilor din lot este egal cu ....

Competenţe de evaluat:	Context teoretic/aplicativ:	Nivel de dificultate:
→ Alegerea metodei adecvate de rezolvare a problemelor în care intervin dependenţe funcţionale sau calculul probabilităţilor → Transpunerea în limbaj matematic a enunţului unei situaţii-problemă → Redactarea coerentă şi completă a soluţiei unei probleme	→ calcul numeric; → numere întregi; → efectuarea corectă a operaţiilor; → citirea şi interpretarea unui tabel de date; → selectarea datelor corespunzătoare cerinţei problemei; → formularea relaţiei matematice corespunzătoare cerinţei	→ elementar

Rezolvare:
Datele problemei:
→ **tranşe de vârste** exprimate în ani: 11, 12, 13 şi respectiv 14 ani; **(citire pe prima linie/prima orizontală)**
→ **număr de elevi** care au o anumită vârstă: 9, 4, 5 şi respectiv 2 ani; **(citire pe a doua linie/a doua orizontală)**
→ **citirea pe coloane (verticale):** prima coloană ne oferă explicaţii privind tipul de date şi asocierea care se face, mai precis primul element de pe o coloană va reprezenta un număr de ani, iar al doilea element de pe coloană va reprezenta numărul de elevi care au respectiva vârstă; astfel:
- din datele conţinute în a doua coloană vom înţelege că pentru vârsta de 11 ani, avem 9 elevi;
- din datele conţinute în a treia coloană vom înţelege că pentru vârsta de 12 ani, avem 4 elevi;
- din datele conţinute în a patra coloană vom înţelege că pentru vârsta de 13 ani, avem 5 elevi;
- din datele conţinute în a cincea coloană vom înţelege că pentru vârsta de 14 ani, avem 2 elevi.

Cerinţa problemei este de a determina numărul de elevi din lot, adică numărul total de elevi pentru care s-au colectat datele privind vârsta; în acest context, informaţiile de spre vârstă nu sunt esenţiale, ci doar informaţiile din a doua linie, referitoare la numărul de elevi.
Obţinem numărul total de elevi ca suma numerelor de elevi corspunzătoare fiecărei vârste:
Nr total elevi = $9+4+5+2=13+7=20$.

Observaţii:
→ în multe contexte practice suntem puşi în situaţia de a colecta serii de date pe anumite criterii; tabelul prezentat în problemă este un exemplu de organizare a datelor, care să permită citirea cu semnificaţie a datelor colectate şi elaborarea unor analize privind datele colectate.
→ un astfel de tabel este organizat pe linii şi coloane, fiecare liniei conţinând date de aceeaşi natură/semnificaţie, iar fiecare coloană conţine corelarea datelor de naturi/semnificaţii diferite;
→ analizele pe care le putem efectua sunt diverse;

Exemple de cerinţe (analize) raportate la tabelul dat:

Vârstă (ani)	11	12	13	14
Număr de elevi	9	4	5	2

a) Câţi elevi au vârsta de 13 ani?
b) Ce vârsta este reprezentată de cei mai mulţi elevi?
c) Câţ elevi au vârste mai mici decât 13 ani?
d) Câţi elevi au vârste mai mari sau egale cu 12 ani?
e) Care este vârsta medie a elevilor?
f) Completaţi tabelul ştiind că în studiu au mai fost incluşi 7 elevi cu vârsta de 15 ani şi 3 elevi cu vârsta de 10 ani.

Recomandare:

În raport cu contextele teoretice-aplicative prezentate, prezentul material poate fi completat cu fişe de activitate pentru elevi, pe grupe de nivel de performanţă, cu itemi selectaţi din banca de probleme propuse pe site-ul www.edu.ro, secţiunea subiecte examene naţionale.