Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a V -a

Subiectul I. Arătați, că pentru orice număr natural nenul n, numărul 21^n poate fi scris ca o sumă de trei pătrate perfecte.

Subiectul II. a) Aflaţi suma cifrelor numărului a, unde $a = 2^{4n+1} \cdot 5^{4n+5} - 3$ ($n \in \mathbb{N}$).
b) Determinaţi cifrele numărului: $x = 100^n - 101^3 \cdot 10^n$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 7$.

Subiectul III. Fie numerele naturale de trei cifre, scrise în baza zece, cu proprietatea că numărul format din primele două cifre ale lor este de trei ori mai mare decât numărul format din ultimele două cifre ale acestora. Aflaţi numerele şi arătaţi că suma cifrelor acestor numere este 13.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.
- Timp efectiv de lucru: $2\frac{1}{2}$ ore.

Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a VI -a

Subiectul I. Fie punctele coliniare $A_0,\ A_1,\ A_2, ...,\ A_n$ situate pe dreapta d în această ordine astfel încât: $A_0A_1 = 1cm,\ A_1A_2 = 2cm, ...,\ A_{n-1}A_n = n\ (cm)$.
a) Aflaţi lungimea segmentului $A_{45}A_{99}$ precum şi distanţa dintre punctele A_0 şi M, unde M este mijlocul segmentului $[A_{45}A_{99}]$.
b) Aflaţi numărul n, dacă lungimea segmentului $[A_0A_n]$ este egală cu 861 cm.

Subiectul II. Numerele naturale nenule a, b, c îndeplinesc simultan condiţiile:
i) $a + 2b + 3c = 3000$, şi $9b + c = 1000$.
ii) a are 16 divizori, b are 8 divizori şi c are 4 divizori. Să se demonstreze că a are patru cifre, b are trei cifre şi c are două cifre.

Subiectul III. Se consideră mulţimea: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = \overline{abcde}\}$, unde a, b, c, d, e sunt cifre distincte pare în baza 10. Aflaţi:
a) Cardinalul mulţimii $B = \{x \in A |\ 4\ divide\ x\}$.
b) Mulţimea $A \cap C$, unde $C = \{x \in A \mid x = t^2, t \in \mathbb{N}\}$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.
- Timp efectiv de lucru: $2\frac{1}{2}$ ore.

Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a VII-a

Subiectul I . Aflaţi cardinalul mulţimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid\ x = \frac{n^2+21n}{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 1\}$.

Subiectul II. Numim număr "drag" un număr natural care are exact 4 divizori naturali.

a) Daţi un exemplu de trei numere "dragi" consecutive.

b) Să se arate că nu există trei numere "dragi" consecutive astfel încât primul dintre ele să fie par.

Subiectul III. Se consideră patrulaterul convex ABCD, astfel încât $AB = AC = AD = CD$ şi $m(\widehat{ABC}) = 80^\circ$. Pe latura AB se ia punctul E, cu $m(\widehat{CEB}) = 30^\circ$. Arătaţi că dreptele DE şi BC sunt paralele.

Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a VIII-a

Subiectul I. Rezolvaţi ecuaţia: $\frac{x^3+1}{9}+\frac{x^3+2}{10}+\frac{x^3+3}{11}+...+\frac{x^3+1012}{1020}=1012$.

Subiectul II. Se dă suma: $S_n=1+\frac{a_1}{1-a_1}+\frac{a_2}{(1-a_1)(1-a_2)}+...+\frac{a_n}{(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)}$, unde $a_i\in\mathbb{Z}\setminus\{1\}$, $i=\overline{1,n}$. Determinaţi numerele întregi a_i, $i=\overline{1,n}$ pentru care S_n este număr natural.

Subiectul III. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare, punctul M este mijlocul segmentului (BC), iar punctele P, Q, R, S, R' şi S' astfel încât $P\in(AM)$, $Q\in(DM)$, $BP\cap AC=\{R\}$, $CP\cap AB=\{S\}$, $BQ\cap CD=\{R'\}$şi $QC\cap BD=\{S'\}$.
a) Dacă punctele P şi Q sunt centrele de greutate ale triunghiurilor ABC şi, respectiv, BCD, arătaţi că dreapta PQ este paralelă la planul (ABD).
b) Demonstraţi că dreptele SS' şi RR' sunt coplanare.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.
- Timp efectiv de lucru: $2\frac{1}{2}$ ore.

Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a IX-a

1. Să se determine cea mai mare valoare a numărului real k pentru care

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 \geq k(x+y)^4,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră triunghiul ABC în care notăm $AB = c$, $AC = b$, M mijlocul lui (BC). Arătaţi că dacă P este punctul din plan cu $\overrightarrow{AP} = b^2 \cdot \overrightarrow{AB} + c^2 \cdot \overrightarrow{AC}$, atunci $m(\widehat{BAP}) = m(\widehat{CAP})$.

3. Dacă $0 < a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ şi $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq k$, atunci

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + ... + (2n-1)a_n^2 \geq k^2,\ n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a X-a

1. Să se determine termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1 = 1$ şi

$$0!a_1 + 1!a_2 + ... + (n-1)!a_n = \frac{a_n a_{n+1}(n-1)!n!}{2}, \text{ oricare ar fi } n \geq 1.$$

2. Notăm cu l_a lungimea bisectoarei din A, cu h_a lungimea înălţimii din A şi cu r raza cercului înscris în $\triangle ABC$. Arătaţi că:

$$\frac{1}{l_a} + \frac{1}{h_a}\sin\frac{A}{2} = \frac{1}{r}\sin\frac{A}{2}$$

3. i) Arătaţi că

$$x^3 + y^3 + z^3 - (x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + yz^2 + y^2z) + 3xyz \geq 0,\ \forall x,\ y,\ z \geq 0.$$

ii) Să se arate că numerele reale a, b satisfac relaţia:

$$x^3 + y^3 + z^3 + a(x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + yz^2 + y^2z) + bxyz \geq 0,\ \forall x,\ y,\ z \geq 0.$$

dacă şi numai dacă există $r, s \in [0, \infty)$ astfel încât $a = r - 1,\ b = 3 - 6r + s$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.
- Timp efectiv de lucru: $2\frac{1}{2}$ ore.

Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a XI-a

1. Să se arate că

$$A \cdot (A - B) \cdot B = B \cdot (A - B) \cdot A,$$

pentru orice matrice pătratică de ordin 2 cu urme egale.

2. Să se determine funcţiile $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ care, pentru m,n numere naturale date, îndeplinesc condiţiile:

a) $f(1,1) = m + n$;
b) $f(x, y + z) = f(x, y) + nz$, oricare ar fi $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$;
c) $f(y + z, x) = f(y, x) + mz$, oricare ar fi $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$;

3. Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale nenule definit prin $a_1 = \frac{1}{6}$ şi $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 3(n+1)(n+2)$, oricare ar fi $n \geq 1$. Să se arate că:

$$a_1a_4 + a_2a_5 + ... + a_na_{n+3} \leq \frac{1}{600}.$$

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii
- Fiecare subiect se punctează cu 7 puncte.
- Timp efectiv de lucru: $2\frac{1}{2}$ ore.

Concursul Interjudețean
"Matematica, de drag"
Ediția a VII - a, Bistrița
23 - 25 noiembrie 2012

Clasa a XII-a

1. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = xarctgx - \frac{1}{2}ln(x^2 + 1).$$

Să se calculeze $f^{(2012)}(0)$.

2. Fie $k \in \mathbb{R}^*$, X, $Y \in M_2(\mathbb{C})$ cu proprietatea $2kY^2 = YX - XY$. Să se arate că $Y^2 = O_2$.

3. Fie $k \in \mathbb{R}^*$ şi $a > 1$. Calculaţi:

$$I(a) = \int \frac{\cos^{2k-1} x(\ln a \cdot \cos x + \sin x)}{a^{2kx} + \cos^{2k} x} \mathrm{dx}$$