Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a X-a, Etapa I, 24 noiembrie 2012

Clasa a V-a

I. Calculați:

(3p) **a)** $(11+22+33+44):(1+2+3+4)$;

(3p) **b)** $2013 \cdot 2012 + 2012 \cdot 2014 - 4027 \cdot 2011$;

(3p) **c)** $(5^3-4^3)+(4^3-3^3)+(3^3-2^3)+(2^3-1^3)+(1^3-0^3)$.

II. Se consideră numerele naturale: $a = 125^{36} \cdot 16^{56}$ și $b = 25^{54} \cdot 27^{43}$.

(3p) **a)** Să se afle cu câte zerouri se termină numărul a;

(3p) **b)** Comparați numerele a și b;

(3p) **c)** Să se afle ultima cifră diferită de zero a numărului $a \cdot b$.

Cristian Olteanu, Traian Preda

III. Fie n cel mai mic număr natural cu suma cifrelor 700.

(4p) **a)** Să se determine numărul n.

(5p) **b)** Dacă m este răsturnatul numărului n, să se afle câtul și restul împărțirii numărului m la 555.

N. M. Goșoniu

IV. *(4p)* **a)** 101 numere naturale sunt așezate pe un cerc astfel încât suma oricăror trei numere vecine să fie un număr impar. Demonstrați că toate numerele sunt impare.

(5p) **b)** 102 numere naturale distincte sunt așezate pe un cerc astfel încât suma oricăror trei numere vecine să fie impară. Să se afle cea mai mică valoare posibilă a sumei celor 102 numere.

Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: 2ore 30 min.

Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a X-a, Etapa I, 24 noiembrie 2012

Clasa a VI-a

I. Se consideră mulțimea $A = \{12,23,34,...,78,89\}$.

(3p) a) Să se afle cardinalul mulțimii A;

(3p) b) Să se afle câte numere prime conține mulțimea A;

(3p) c) Să se demonstreze că diferența oricăror două elemente din mulțimea A este divizibilă cu 11.

II. Pe segmentul $[AB]$ cu lungimea de 100 cm se considră punctele M și N astfel încât $[AM] \equiv [NB]$, iar $MN = 3 \cdot AM$. Dacă P este mijlocul segmentului $[MB]$ și Q mijlocul segmentului $[AN]$, se cere:

(4p) a) Să se calculeze lungimea segmentului $[PQ]$;

(5p) b) Să se demonstreze că $[AQ] \equiv [PB]$.

Cristina Godeanu

III. *(4p)* a) Împărțind numerele 2012, 1429 și 1080, în această ordine, la același număr natural n se obțin ca resturi trei numere naturale impare consecutive, în ordine crescătoare. Să se afle numărul n.

N. M. Goșoniu

(5p) b) Să se demonstreze că numărul

$$a = 2013^1 + 2013^2 + 2013^3 + ... + 2013^{2016}$$

este divizibil cu cel puțin șase numere prime distincte.

Cristian Olteanu, Traian Preda

IV. *(4p)* a) Să se afle câte pătrate perfecte se pot scrie ca suma a trei numere naturale consecutive, fiecare din cele trei numere având două cifre.

(5p) b) Să se afle cel mai mare pătrat perfect care se poate scrie ca o sumă de numere naturale distincte, fiecare număr având două cifre.

Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: 2ore 30 min.

Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a X-a, Etapa I, 24 noiembrie 2012

Clasa a VII-a

I. Se consideră numerele raționale $a = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$ și $c = \frac{1}{10} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2}$.

(3p) **a)** Ordonați crescător numerele a, b, c;

(3p) **b)** Calculați $a+b+c$

(3p) **c)** Calculați $a:b:c$.

II. *(4p)* **i)** Să se afle numărul valorilor lui n, $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 2012$, pentru care fracția $\frac{5n+1}{7n+6}$ este reductibilă.

N. M. Goşoniu

ii) Fie a, b, c trei numere raționale, astfel încât $a+b+c=0$.

(2p) **a)** Calculați $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$;

(3p) **b)** Demonstrați că $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \leq 0$.

Cristian Olteanu, Traian Preda

III. Fie A, B, C trei puncte coliniare, în această ordine. În același semiplan față de dreapta AC se consideră punctele D și E astfel încât ΔABD și ΔBEC să fie echilaterale.
Se consideră punctele M, N, P, Q mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[AE]$, respectiv $[CD]$. Demonstrați că:

(3p) **a)** $[AE] \equiv [CD]$;

(3p) **b)** $[MQ] \equiv [NP]$;

(3p) **c)** Punctele D, T, E sunt coliniare, unde $MP \cap NQ = \{T\}$.

Traian Preda.

IV. Se consideră $\Delta ABC \equiv \Delta ADE$, dreptunghice în A, având interioare disjuncte și astfel încât punctele C și D se află în același semiplan deschis mărginit de dreapta AB.
Notăm M și N mijloacele segmentelor $[BC]$, respectiv $[DE]$ și $CE \cap BD = \{F\}$.
Demonstrați că:

(2p) **a)** $CE \perp BD$;

(2p) **b)** $MANF$ este romb;

(2p) **c)** $MANF$ este pătrat dacă și numai dacă punctele A, D, C sunt coliniare;

(3p) **d)** În cazul în care punctele A, D, C, sunt coliniare și O este centrul pătratului $MANF$, ducem $OT \perp BE$, $T \in BE$. Demonstrați că $OT = \frac{BE}{4}$.

Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **3 ore.**

Concursul Național de Matematică "Arhimede"
Ediția a X-a, Etapa I, 24 noiembrie 2012

Clasa a VIII-a

I. *(3p)* **1.** Fie $a=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)^2$. Calculați $|a-1|$.

2. Se consideră numerele $x=\sqrt{10}-\sqrt{7-\sqrt{8}}$ și $y=\sqrt{10}+\sqrt{7-\sqrt{8}}$.

(3p) **a)** Calculați media geometrică a numerelor x și y.

(3p) **b)** Calculați suma pătratelor numerelor x și y.

Cristina Godeanu

II. *(4p)* **a)** Dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{a}{bc}+\frac{b}{ac}+\frac{c}{ab}.$$

(5p) **b)** Dacă a, b, c sunt numere raționale nenule, astfel încât $ab+bc+ca=671$, arătați că numărul $n=\sqrt{(2013+3a^2)\cdot(2013+3b^2)\cdot(2013+3c^2)}$ nu este rațional.

Ion Neață, Slatina

III. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB\parallel CD$, $AB=2a$, $AD=DC=a$, $m(\angle A)=m(\angle D)=90°$ și E mijlocul lui $[AB]$. Se construiește $MA\perp(ABC)$, $MA=a$.

(3p) **a)** Arătați că $AD\parallel(MCE)$;

(3p) **b)** Arătați că $DE\perp(MAC)$;

(3p) **c)** Calculați perimetrul ΔMBC.

Cristina Godeanu

IV. Fie $ABCD$ un tetraedru, G_1 și G_2 centrele de greutate ale fețelor ABC, respectiv BCD. Știind că $DG_1\perp(ABC)$ și $AG_2\perp(BCD)$, demonstrați că:

(4p) **a)** tetraedrul $ABCD$ are cel puțin 4 muchii congruente

(5p) **b)** dacă în plus, $\min(AD;BC)\ge AB$, atunci $ABCD$ este un tetraedru regulat.

Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.
Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă.
Timp de lucru: **3 ore**.