Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
CONCURS NAȚIONAL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE DECLARATE VACANTE TITULARIZABILE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
16 IULIE 2008 VARIANTA 5

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 4 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

1. Fie numerele întregi a,b,c, matricea $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ 5c & a & b \\ 5b & 5c & a \end{pmatrix}$ și funcția $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(x)=a+bx+cx^2$. Se notează cu $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{C}$ soluțiile ecuației $x^3-5=0$.

5p **a)** Să se determine x_1,x_2,x_3.

4p **b)** Fie $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{pmatrix}$. Să se arate că $A\cdot B=\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & f(x_3) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & x_3 f(x_3) \\ x_1^2 f(x_1) & x_2^2 f(x_2) & x_3^2 f(x_3) \end{pmatrix}$.

3p **c)** Să se arate că $\det(A)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)$.

3p **d)** Să se demonstreze că dacă $\det(A)=0$, atunci $a=b=c=0$.

2. Fie triunghiul ABC cu $AB=8,\ AC=7$ și $BC=5$. Fie O un punct situat în interiorul triunghiului ABC astfel încât cercurile circumscrise triunghiurilor AOB, BOC și COA să aibă aceeaşi rază R.

4p **a)** Să se calculeze măsura unghiului ABC.

3p **b)** Să se determine raza cercului circumscris triunghiului ABC.

3p **c)** Fie P și Q centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOB, respectiv COA. Să se demonstreze că $AQOP$ este romb.

3p **d)** Să se determine R.

2p **e)** Fie O' centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Să se arate că punctele A,O,O' și C sunt conciclice.

SUBIECTUL II (30p)

1. Fie polinomul $f=X^n+2X^{n-1}+3X^{n-2}+...+nX-1$, cu n natural, $n\geq 3$.

4p **a)** Să se calculeze $f(0)$ și $f(1)$.

3p **b)** Să se arate că f are o rădăcină în intervalul $(0,1)$.

3p **c)** Să se arate, folosind eventual schema lui Horner, că există $\alpha\in(0,1)$ și $b_1,b_2,...,b_{n-1}\in\mathbb{R}$ cu $1<b_1<b_2<...<b_{n-1}$ astfel încât $f=(X-\alpha)\left(X^{n-1}+b_1X^{n-2}+b_2X^{n-3}+...+b_{n-2}X+b_{n-1}\right)$.

3p **d)** Fie polinomul $g=X^{n-1}+c_1X^{n-2}+c_2X^{n-3}+...+c_{n-2}X+c_{n-1}\in\mathbb{R}[X]$ cu $1<c_1<c_2<...<c_{n-1}$ și $z\in\mathbb{C}$ cu $g(z)=0$. Să se demonstreze că $|z|>1$.

2p **e)** Să se demonstreze că polinomul f nu poate fi scris ca produs de două polinoame cu coeficienți întregi, fiecare având gradul cel puțin 1.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt[3]{4x^3-3x}$. Pentru fiecare $a\in\mathbb{R}$ se defineşte şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel: $x_0=a$ și $x_{n+1}=4x_n^3-3x_n$.

4p **a)** Să se determine asimptota spre $+\infty$ a graficului funcției *f*.

3p **b)** Să se determine toate punctele $b\in\mathbb{R}$ cu proprietatea că funcția f nu e derivabilă în b.

3p **c)** Să se arate că $f(x)\in[-1,1]$, oricare ar fi $x\in[-1,1]$.

3p **d)** Pentru $a=2$, să se demonstreze că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$.

2p **e)** Să se arate că există o infinitate de valori ale lui $a\in\mathbb{R}$ pentru care şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

SUBIECTUL III (30p)

Stabiliți corelații între metodele didactice, mijloacele de învățământ şi formele de organizare a activității, cu aplicații la disciplina de concurs, având în vedere:

- definirea conceptelor: metodă didactică, mijloace de învățământ, forme de organizare a activității didactice;
- trei aplicații/exemple de combinare eficientă a metodelor, mijloacelor şi formelor de organizare a activității didactice la disciplina de concurs.

Ministerul Educației, Cercetării și Tineretului
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

CONCURS NAȚIONAL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE DECLARATE VACANTE TITULARIZABILE ÎN ÎNVĂȚĂMÂNTUL PREUNIVERSITAR
16 IULIE 2008 VARIANTA 5

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

SUBIECTUL I (30 puncte)

1)	**a)** $x_1=\sqrt[3]{5}$	**3p**
	$x_{2,3}=\dfrac{-\sqrt[3]{5}\pm i\sqrt{3\sqrt[3]{25}}}{2}$	**2p**
	b) $f(x_1)=a+bx_1+cx_1^2$, $x_1f(x_1)=5c+ax_1+bx_1^2$, $x_1^2f(x_1)=5b+5cx_1+ax_1^2$	**2p**
	Finalizare	**2p**
	c) $\det(A)\det(B)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)\det(B)$	**1p**
	$\det(B)=(x_3-x_2)(x_3-x_1)(x_2-x_1)\neq 0$	**1p**
	Finalizare	**1p**
	d) Polinomul $g=X^3-5$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$ pentru că are gradul 3 și rădăcini în $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Q}$	**3p**
	Fie $F=a+bX+cX^2\in\mathbb{Q}[X]$ și $d=(g,F)\in\mathbb{Q}[X]$.	
	$F(x_1)F(x_2)F(x_3)=f(x_1)f(x_2)f(x_3)=0\Rightarrow\exists i\in\{1,2,3\}$ cu $F(x_i)=0$. Atunci	
	$d(x_i)=0$. Cum $g\neq 0\Rightarrow d\neq 0\Rightarrow \text{grad}\, d\geq 1$. Rezultă că d și g sunt asociate în	
	divizibilitate, deci g/F. Dar $\text{grad}\,F\leq 2\Rightarrow F=0\Rightarrow a=b=c=0$	
2)	**a)** $\cos B=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$	**3p**
	$m(\sphericalangle B)=60^\circ$	**1p**
	b) Din teorema sinusului rezultă că raza cercului circumscris triunghiului ABC este $\dfrac{7}{\sqrt{3}}$	**3p**
	c) $QA=QO=PA=PO=R\Rightarrow AQOP$ romb	**3p**
	d) Fie T centrul cercului circumscris triunghiului BOC. Justificarea faptului că $\triangle ABC\equiv\triangle TQP$	**2p**
	$R=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$	**1p**
	e) Triunghiul ABC este ascuțitunghic, deci O' este în interiorul triunghiului ABC	**1p**
	$\cos(\sphericalangle AOC)=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow m(\sphericalangle AOC)=120^\circ$	
	Finalizare	**1p**

SUBIECTUL II (30 puncte)

1)	**a)** $f(0)=-1$	**2p**
	$f(1)=\dfrac{n(n+1)}{2}-1$	**2p**
	b) Funcția polinomială a lui f este continuă pe $[0,1]$	**1p**
	$f(0)\cdot f(1)<0\Rightarrow\exists\alpha\in(0,1)$ cu $f(\alpha)=0$	**2p**
	c) $f(\alpha)=0$. Din schema lui Horner rezultă	**3p**
	$b_1=\alpha+2>1,\ b_2=\alpha^2+2\alpha+3>b_1,\ \dots,\ b_{n-1}=\alpha^{n-1}+2\alpha^{n-2}+\dots+n>b_{n-2}$	
	d) $0=zg(z)-g(z)=z^n+(c_1-1)z^{n-1}+(c_2-c_1)z^{n-2}+\dots+(c_{n-1}-c_{n-2})z-c_{n-1}$	**3p**
	$c_{n-1}=\lvert c_{n-1}\rvert\leq\lvert z\rvert^n+(c_1-1)\lvert z\rvert^{n-1}+(c_2-c_1)\lvert z\rvert^{n-2}+\dots+(c_{n-1}-c_{n-2})\lvert z\rvert$	

	Dacă $\left|z\right|\le 1$, atunci $c_{n-1}\le 1+c_1-1+c_2-c_1+...+c_{n-1}-c_{n-2}=c_{n-1}$, deci în toate inegalitățile avem egalități. În particular $z\ne 0$ şi $z^n=\lambda\left(c_1-1\right)z^{n-1}$ cu $\lambda>0$, deci $z=\lambda\left(c_1-1\right)\in\left(0,\infty\right)$. Rezultă că g are o rădăcină strict pozitivă, fals, pentru că $g\left(x\right)>0$, $\forall x>0$. Deci $\left|z\right|>1$	
	e) Presupunem că $f=h\cdot t$, h şi t două polinoame cu coeficienți întregi, fiecare având gradul cel puțin 1 $f=\left(X-\alpha\right)g$ cu $g=X^{n-1}+b_1X^{n-2}+b_2X^{n-3}+...+b_{n-2}X+b_{n-1}$, cu $1<b_1<b_2<...<b_{n-1}$, rezultă că $g\left(\alpha\right)\ne 0$, deci α este o rădăcină simplă a lui *f*. Atunci α este rădăcină numai pentru unul din polinoamele h sau t. Fie $h\left(\alpha\right)\ne 0$. Dacă $z_1,...,z_s$ sunt rădăcinile lui *h*, atunci $g\left(z_i\right)=0,\ i=\overline{1,s}$ deci $\left|z_i\right|>1$. Cum *f* are coeficientul dominant 1, putem presupune că *h* şi *t* au coeficientul dominant 1. Din $-1=f\left(0\right)=h\left(0\right)t\left(0\right)\Rightarrow\left|h\left(0\right)\right|=1$. Din ultima relație a lui Viète rezultă că $1=\left|h\left(0\right)\right|=\left|z_1z_2...z_s\right|=\left|z_1\right|\left|z_2\right|...\left|z_s\right|>1$, fals	**2p**
2)	**a)** $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=\infty$	**1p**
	$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\sqrt[3]{4}$	**1p**
	$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f\left(x\right)-\sqrt[3]{4}x\right)=0$,	**1p**
	deci $y=\sqrt[3]{4}x$ este asimptota spre $+\infty$ a graficului funcției *f*.	**1p**
	b) $f'\left(x\right)=\frac{4x^2-1}{\sqrt[3]{x^2\left(4x^2-3\right)^2}}$, $x\ne 0,\ x\ne\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1p**
	$\lim\limits_{x\to 0}f'\left(x\right)=-\infty$, deci *f* nu e derivabilă în 0	**1p**
	$\lim\limits_{x\to\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}f'\left(x\right)=\infty$, deci *f* nu e derivabilă în $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1p**
	c) Fie $x\in\left[-1,1\right]$ şi $\alpha\in\left[0,\pi\right]$ astfel încât $\cos\alpha=x\Rightarrow f^3\left(x\right)=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=\cos 3\alpha\in\left[-1,1\right]\Rightarrow f\left(x\right)\in\left[-1,1\right]$ (sau se studiază monotonia funcției *f*)	**3p**
	d) $\left(x_n\right)_n$ este strict crescător	**1p**
	Fie $x_n\to l,\ l\in\overline{\mathbb{R}}$. Dacă $l\in\mathbb{R}$, atunci $l=4l^3-3l\Rightarrow l\in\left\{-1,0,1\right\}\Rightarrow l<x_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$, fals pentru că $\left(x_n\right)_n$ este strict crescător către *l*, deci $x_n\to\infty$	**2p**
	e) Pentru $a=\cos\frac{2\pi}{3^k},\ k\in\mathbb{N}^*$ şirul $\left(x_n\right)_n$ este convergent	**2p**

SUBIECTUL III (30 puncte)

- definirea conceptelor:
    - metodă didactică **5 p**
    - mijloace de învățământ **5 p**
    - forme de organizare a activității didactice **5 p**
- trei aplicații/exemple de combinare eficientă a metodelor, mijloacelor şi formelor de organizare a activității didactice la disciplina de concurs **3x5p= 15p**

- **Total 100 de puncte din care 10 sunt din oficiu.**
- **Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**