Se consideră funcțiile f:R→R, f(x)= $\left[x+\frac{1}{2}\right]$ şi g:R→R, g(x) = I f(x) – x I, unde $\left[x+\frac{1}{2}\right]$ înseamnă partea întreagă a numărului real $x+\frac{1}{2}$.

a. Să se arate că f(x) = $\begin{cases} 0, x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \\ 1, x=\frac{1}{2} \end{cases}$ şi g(x)= IxI, oricare x $\in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ **4 p**

b. Să se arate că funcția g este periodică de perioadă T=1 şi este continuă pe R **4 p**

c. Să se demonstreze că $\int_{k-1}^{k} g(x)dx = \int_{0}^{1} g(x)dx, oricare$ k $\in N^*$ **4 p**

d. Să se arate că $\int_{0}^{1} g(x)\cdot g(nx)dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(x)\cdot g(nx)dx$ oricare n $\in N^*$ **4 p**

e. Să se arate că există $x_k^{'}, x_k^{''} \in \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$ astfel încât :

$g\left(x_k^{'}\right)\cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx)dx \le \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(x)\cdot g(nx)dx \le g\left(x_k^{''}\right)\cdot \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} g(nx)dx$ **2 p**

f. Folosind faptul că pentru orice $y_k \in \left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(y_k) = \int_{0}^{1} g(x)dx$, să se arate că

$\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{1} g(x)\cdot g(nx)dx = (\int_{0}^{1} g(x)dx)^2$: **2 p**

SUBIECTUL IV **30 puncte**

Alegeți unul din mijloacele de învățământ : fişele de lucru, calculatorul, planşele şi precizați:

a) Modul său de integrare în activitatea didactică cu elevii (predare/învățare/evaluare) **15 p**

b) Un exemplu de utilizare adecvată a respectivului mijloc de învățământ la disciplina la care susțineți concurs pe o temă la alegere **15 p**

MINISTERUL EDUCAȚIEI, CERCETĂRII ȘI TINERETULUI
INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN DOLJ

CONCURSUL PENTRU OCUPAREA POSTURILOR DIDACTICE / CATEDRELOR DECLARATE VACANTE / REZERVATE ÎN UNITĂȚILE DE ÎNVĂȚĂMÂNT PREUNIVERSITAR DIN JUDEȚUL DOLJ, CENTRUL DE CONCURS NR. 19
9 IULIE 2008
PROBA SCRISĂ LA MATEMATICĂ
PROFESORI

VARIANTA 3

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 4 ore.**

SUBIECTUL I (20 puncte)

Pentru o matrice $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(C)$ notăm tr(A) = a+d și considerăm polinomul atașat matricei A, $f = X^2 - tr(A)\cdot X + \det(A)$. Notăm cu $x_1, x_2 \in C$ rădăcinile polinomului f.

a) Să se arate că $f(x) = \det(A - x \cdot I_2)$, $(\forall)\ x \in C$ (4p)
b) Să se arate că polinomul atașat matricei I_2 are rădăcinile $x_1 = 1$ și $x_2 = 1$ (4p)
c) Să se verifice că $A^{n+2} - (a+d) \cdot A^{n+1} + (ad-bc) \cdot A^n = O_2$, $(\forall)\ n \in N$ (4p)
d) Să se arate că polinomul atașat matricei A^n are rădăcinile x_1^n și x_2^n, $(\forall)\ n \in N^*$ (4p)
e) Să se arate că dacă matricea A verifică $|tr(A)| > 2$, atunci $A^n \neq I_2$, $(\forall)\ n \in N^*$ (4p)

SUBIECTUL II (20 puncte)

Fie ABC un triunghi, G centrul său de greutate, I centrul cercului înscris și M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze:

a) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$ (4p)

b) $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a+b+c)\overrightarrow{MI}$, unde a,b,c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC

(4p)

c) Dacă $\vec{v} = a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC}$ și $\vec{u} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$ să se arate că vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$ sunt coliniari și că $3|\vec{v}| = (a+b+c)|\vec{u}|$

(4p)

Considerăm punctul M în interiorul triunghiului ABC. Bisectoarele interioare ale unghiurilor $\angle$BMC, $\angle$CMA, $\angle$AMB intersectează laturile (BC), (CA), respectiv (AB) în punctele D, E, respectiv F. Arătați că:

d) Dreptele AD, BE și CF sunt concurente într-un punct P. (4p)
e) $\frac{PA}{PD} \cdot \frac{PB}{PE} \cdot \frac{PC}{PF} = 8$ dacă și numai dacă M este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. (4p)

SUBIECTUL III — 20 puncte