

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $\log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3}) + \log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = 2$.
- 5p** 2. Calculați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 5x + 4$ cu axa Ox .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x + 3^{x+1} = 4$.
- 5p** 4. Determinați rangul termenului care conține x^{14} în dezvoltarea binomului $\left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{20}$, $x > 0$.
- 5p** 5. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ și este paralelă cu dreapta d de ecuație $3x + 2y - 1 = 0$.
- 5p** 6. Determinați măsura unghiului C al triunghiului ABC , știind că $BC = 2$, $AB = \sqrt{2}$ și măsura unghiului BAC este egală cu 45° .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} -x + ay + (2a + 4)z = 1 \\ (a + 2)x + ay + (a + 1)z = 1 \\ (a + 1)x + (2a - 1)y + 3z = 2 \end{cases}$$
, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Arătați că determinantul matricei sistemului este egal cu $3a^3 + 9a^2 - 3a - 9$.
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul este compatibil determinat.
- 5p** c) Pentru $a = -2$, rezolvați sistemul.
2. Se consideră polinomul $f = X^8 + 4X^4 + 3$, $f \in \mathbb{Z}_5[X]$.
- 5p** a) Arătați că $a^5 = a$, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_5$.
- 5p** b) Arătați că polinomul f este reductibil peste \mathbb{Z}_5 .
- 5p** c) Arătați că polinomul f nu are rădăcini în \mathbb{Z}_5 .

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$.
- 5p** a) Calculați $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că, pentru orice număr real $m > 0$, ecuația $f(x) = m$ are o soluție unică în \mathbb{R} .
2. Pentru fiecare număr natural nenul p , se consideră numărul $I_p = \int_0^1 x^p e^{x^2} dx$.
- 5p** a) Calculați I_1 .
- 5p** b) Arătați că $2I_p + (p-1)I_{p-2} = e$, pentru orice $p \geq 3$.
- 5p** c) Calculați $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \left(e^{\frac{1^2}{n^2}} + 2e^{\frac{2^2}{n^2}} + \dots + ne^{\frac{n^2}{n^2}} \right)$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3}) + \log_2(\sqrt{7} - \sqrt{3}) = \log_2(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})$ Finalizare	3p 2p
2.	$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ sau $x = -4$ Distanța este egală cu 3	3p 2p
3.	Notăm $3^x = t$ și obținem $t + 3t = 4$ $t = 1 \Leftrightarrow x = 0$	3p 2p
4.	$T_{k+1} = C_{20}^k \cdot x^{20-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^k = C_{20}^k \cdot x^{20-k-\frac{k}{2}}$ $20 - k - \frac{k}{2} = 14 \Leftrightarrow k = 4$ Rangul termenului este 5	2p 2p 1p
5.	$m_d = -\frac{3}{2}$ Ecuația paralelei este $y - y_A = -\frac{3}{2}(x - x_A)$ adică $y = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$	2p 3p
6.	$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \sin C = \frac{1}{2}$ $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$, deoarece $m(\sphericalangle A) > m(\sphericalangle C)$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} -1 & a & 2a+4 \\ a+2 & a & a+1 \\ a+1 & 2a-1 & 3 \end{vmatrix} =$ $= \begin{vmatrix} 3a+3 & a & 2a+4 \\ 3a+3 & a & a+1 \\ 3a+3 & 2a-1 & 3 \end{vmatrix} = (3a+3) \begin{vmatrix} 1 & a & 2a+4 \\ 1 & a & a+1 \\ 1 & 2a-1 & 3 \end{vmatrix} = (3a+3) \begin{vmatrix} 1 & a & 2a+4 \\ 0 & 0 & -a-3 \\ 0 & a-1 & -2a-1 \end{vmatrix}$ Finalizare	2p 2p 1p
b)	Sistemul este compatibil determinat $\Leftrightarrow \det A \neq 0$ $\det A = 0 \Leftrightarrow a \in \{-1, 1, -3\}$ $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, -3\}$	2p 2p 1p
c)	$a = -2 \Rightarrow \begin{cases} -x - 2y = 1 \\ -2y - z = 1 \\ -x - 5y + 3z = 2 \end{cases}$	1p

	$x = -\frac{1}{9}, y = -\frac{4}{9}, z = -\frac{1}{9}$	4p
2.a)	$\hat{0}^5 = \hat{0}, \hat{1}^5 = \hat{1}, \hat{2}^5 = \hat{2}, \hat{3}^5 = \hat{3}, \hat{4}^5 = \hat{4}$	5p
b)	$f = X^8 + X^4 + \hat{3}X^4 + \hat{3} = X^4(X^4 + \hat{1}) + \hat{3}(X^4 + \hat{1})$	2p
	$f = (X^4 + \hat{1})(X^4 + \hat{3})$	3p
c)	$f(\hat{0}) = \hat{3}$	1p
	$a \neq \hat{0} \Rightarrow a^4 = \hat{1}$	2p
	$f(a) = \hat{1} + \hat{4} + \hat{3} = \hat{3}$ pentru orice $a \neq \hat{0}$	1p
	Finalizare	1p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	f este derivabilă pe \mathbb{R} și $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$	2p
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 1$	3p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x} = 2$	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$	2p
	$y = 2x$ este ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f	1p
c)	f este continuă pe \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow f$ este surjectivă, deci ecuația are soluție	2p
	$f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este strict crescătoare $\Rightarrow f$ este injectivă, deci soluția este unică	3p
2.a)	$I_1 = \int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big _0^1 =$	3p
	$= \frac{e-1}{2}$	2p
b)	$2I_p = \int_0^1 x^{p-1} (2xe^{x^2}) dx = \int_0^1 (e^{x^2})' x^{p-1} dx = e^{x^2} x^{p-1} \Big _0^1 - (p-1) \int_0^1 e^{x^2} x^{p-2} dx$	3p
	$2I_p = e - (p-1)I_{p-2} \Rightarrow 2I_p + (p-1)I_{p-2} = e$	2p
c)	Considerăm funcția continuă $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = xe^{x^2}$, șirul de diviziuni $\Delta_n = \left(\frac{k}{n}\right)_{k=0, \dots, n}$ cu	
	$\ \Delta_n\ \rightarrow 0$ și punctele intermediare $\frac{k}{n} \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$	1p
	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \left(e^{\frac{1^2}{n^2}} + 2e^{\frac{2^2}{n^2}} + \dots + ne^{\frac{n^2}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \cdot e^{\left(\frac{k}{n}\right)^2} =$	2p
	$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx = \frac{e-1}{2}$	2p