LUCRARE SCRISĂ LA MATEMATICĂ
VARIANTA II

1. Fie ecuația $x^2 - x + m + 1 = 0$. Valoarea parametrului $m \in \mathbf{R}$ pentru care are loc relația $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$ este:
   a) $m = 0$; **b)** $m = 1$; **c)** $m = -1$; **d)** $m = 2$; **e)** $m = -2$.

2. Fie familia de funcții de gradul doi $f_m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m-1)x + m - 1$, $m \neq 0$. Vârfurile parabolelor P_m asociate funcțiilor f_m se găsesc pe dreapta:
   a) $x + y = 0$; **b)** $x - y = 0$; **c)** $x + y = 1$; **d)** $2x + y = 0$; **e)** $x + y = 2$.

3. Fie $A(1;2), B(2;5), C(3;m)$. Valoarea parametrului $m \in \mathbf{R}$ astfel încât $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5$, este:
   a) $m = 3$; **b)** $\mathrm{m} = -6$; **c)** $\mathrm{m} = 10$; **d)** $m \in \Phi$; **e)** $\mathrm{m} = 0$.

4. Valoarea parametrului real α pentru care dreptele $(d_1) : \alpha x + (\alpha - 1)y - 3 = 0$ şi $(d_2) : 2x - (\alpha + 1)y + 1 = 0$ sunt paralele, este:
   a) $\alpha \in \left\{ \frac{-3-\sqrt{17}}{2}; \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \right\}$; **b)** $\alpha \in \left\{ -\frac{3}{2}; \frac{3}{2} \right\}$; **c)** $\alpha \in \{-1;2\}$; **d)** $\alpha \in \Phi$; **e)** $\alpha = 2$.

5. Dacă $\log_3 2 = a$ şi $\log_3 5 = b$, atunci $\log_3 20$ este:
   a) $2a + b$; **b)** $2a - b$; **c)** $2ab$; **d)** $a + b$; **e)** $a - b$.

6. Rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{21}$ în care nu apare x, este:
   a) T_7; **b)** T_9; **c)** T_8; **d)** T_6; **e)** T_{10}.

7. Fie $z_1 = 1 - m + i$ şi $z_2 = m + 1 - 2mi$, unde $i^2 = -1$. Valorile lui $m \in \mathbf{R}$ pentru care $z_1 \cdot z_2 \in \mathbf{R}$ sunt:
   a) $\mathrm{m} \in \Phi$; **b)** $m \in \{1;2\}$; **c)** $m \in \{-1;5\}$; **d)** $m \in \{0;2\}$; **e)** $m \in \{-3;-2\}$.

8. Dacă $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$ şi $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right)$, atunci $\sin\alpha$ are valoarea:
   a) $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$; **b)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$; **c)** $-\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{1}{2}$; **e)** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$.

9. Fie ecuația $x^3 + x + 1 = 0$. Atunci valoarea determinantului $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}$ este:
   a) $\Delta = 0$; **b)** $\Delta = 1$; **c)** $\Delta = -1$; **d)** $\Delta = 2$; **e)** $\Delta = -2$.

10. Ecuația $2^x(x^2 + 1) - 3 = 0$ are soluție în intervalul:
   a) $(0;1)$; **b)** $(-1;0)$; **c)** $(3;\infty)$; **d)** $(2;3)$; **e)** $(-2;-1)$.

11. Valorile parametrilor reali m şi n astfel încât ecuația $x^3 + x^2 + mx - n = 0$ să admită rădăcina dublă $x = -1$ sunt:
   a) $m = -1, n = 1$; **b)** $m = -2, n = -1$; **c)** $m = n = 1$; **d)** $m = 1, n = -1$; **e)** $m = -1, n = 2$.

12. Valorile parametrului $m \in \mathbf{R}$ pentru care ecuația $4x^3 - 3x + 1 - m = 0$ admite toate soluțiile reale distincte, sunt:
   a) $m \in (0;2)$; **b)** $m \in (-\infty,0) \cup (2,\infty)$; **c)** $m \in (-1;0)$; **d)** $m \in (0;1)$; **e)** $m \in \Phi$.

13. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-arctg\,x}{x^3}$ este:

a) $\frac{1}{3}$**;** **b)** 0**;** **c)** ∞**;** **d)** 3**;** **e)** 1**.**

14. Rezultatul integralei $\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx$ este:

a) $\frac{3}{2}$**;** **b)** 2**;** **c)** -2**;** **d)** 1**;** **e)** -1**.**

15. Volumul corpului obținut prin rotația graficului funcției $f:[0;3]\to\mathbf{R}, f(x)=\sqrt{\frac{x(x-3)}{x-4}}$ în jurul axei Ox este:

a) $\pi\left(\frac{15}{2}-8\ln 2\right)$**;** **b)** $\pi\left(\frac{7}{2}-8\ln 2\right)$**;** **c)** $\pi\left(\frac{3}{2}-8\ln 2\right)$**;** **d)** $\pi\left(\frac{15}{2}+8\ln 2\right)$**;** **e)** $\pi\left(\frac{15}{2}+2\ln 2\right)$**.**

Rezolvare subiect matematică
Varianta II

1.

$$S=-\frac{b}{a}=1;$$

$$P=\frac{c}{a}=m+1;$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=1\Leftrightarrow\frac{x_2+x_1}{x_1x_2}=1\Leftrightarrow\frac{1}{m+1}=1\Rightarrow m=0.$$

2.

$$\left.\begin{aligned}x_v&=-\frac{b}{2a}=\frac{1-m}{m}\\ y_v&=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{m-1}{m}\end{aligned}\right\}\Rightarrow x_v+y_v=0.$$

Ecuația dreptei pe care se găsesc vârfurile parabolelor P_m asociate funcțiilor f_m este $x+y=0$.

3.

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AB}&=\vec{i}+3\vec{j}\\ \overrightarrow{AC}&=2\vec{i}+(m-2)\vec{j}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3m-4;$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5\Leftrightarrow 3m-4=5\Rightarrow m=3.$$

4. $(d_1):\alpha x+(\alpha-1)y-3=0;\ m_{d_1}=\frac{\alpha}{1-\alpha}$

$(d_2):2x-(\alpha+1)y+1=0;\ m_{d_2}=\frac{2}{\alpha+1}$

$$d_1\parallel d_2\Leftrightarrow m_{d_1}=m_{d_2}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{1-\alpha}=\frac{2}{\alpha+1}\Rightarrow\alpha^2+3\alpha-2=0;\alpha\in\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}.$$

5. $\log_3 20=\log_3(4\cdot 5)=\log_3 4+\log_3 5=2\underbrace{\log_3 2}_{a}+\underbrace{\log_3 5}_{b}=2a+b.$

6. $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k=C_{21}^k\cdot\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{21-k}\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k=C_{21}^k\cdot x^{\frac{21-k}{5}-\frac{k}{2}};\ \frac{21-k}{5}-\frac{k}{2}=0\Rightarrow k=6.$

Rangul termenului din dezvoltare în care nu apare x este T_7.

7.

$$\left.\begin{aligned}z_1&=1-m+i\\ z_2&=m+1-2mi\end{aligned}\right\}\Rightarrow z_1\cdot z_2=1+2m-m^2+\left(2m^2-m+1\right)i;$$

$$z_1\cdot z_2\in R\Rightarrow 2m^2-m+1=0;\Delta<0\Rightarrow m\in\Phi.$$

8. $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\Rightarrow\sin\alpha<0;$

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{25}}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

9. Relațiile lui Viete: $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=1; \\ x_1x_2x_3=-1 \end{cases}$

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1+x_2+x_3 & x_2 & x_3 \\ x_1+x_2+x_3 & x_1 & x_2 \\ x_1+x_2+x_3 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & x_3 & x_1 \end{vmatrix}=0.$$

10. Fie $f(x)=2^x(x^2+1)-3$.

$\left.\begin{matrix} f(0)=-2 \\ f(1)=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(0)\cdot f(1)\le 0 \Rightarrow$ soluția se găseşte în intervalul $(0;1)$.

11. $x=-1$ rădăcină dublă $\Leftrightarrow f(-1)=f'(-1)=0$.

$f(-1)=0 \Leftrightarrow m+n=0$

$f'(-1)=0 \Leftrightarrow 1+m=0$

$\begin{cases} m+n=0 \\ 1+m=0 \end{cases} \Rightarrow m=-1, n=1$.

12. $f'(x)=0 \Rightarrow 12x^3-3=0;\ x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	-	$\underbrace{2-m}_{+}$	$\underbrace{-m}_{-}$	+

Ecuația admite toate rădăcinile reale, distincte: $\begin{cases} 2-m>0 \\ -m<0 \end{cases} \Rightarrow m\in(0;2)$.

13. $$\lim_{x\to 0}\frac{x-arctg\,x}{x^3} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{l'H}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{-2}2x}{6x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{3}.$$

14. $t=\ln x \Rightarrow dt=\frac{dx}{x}$;

$x_1=e \Rightarrow t_1=1;$

$x_2=e^2 \Rightarrow t_2=2;$

$$\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^2 t\,dt=\left.\frac{t^2}{2}\right|_1^2=\frac{3}{2}.$$

15.

$$V=\pi\int_0^3 f^2(x)\,dx=\pi\int_0^3\frac{x(x-3)}{x-4}\,dx=\pi\int_0^3\left(x+1+\frac{4}{x-4}\right)dx$$

$$=\pi\left.\left(\frac{x^2}{2}+x+4\ln|x-4|\right)\right|_0^3=\pi\left(\frac{15}{2}-8\ln 2\right).$$