53rd International Mathematical Olympiad
MAR DEL PLATA - ARGENTINA

Day: 1

Marţi, 10 iulie, 2012

Problema 1. Fie ABC un triunghi şi fie J centrul cercului exînscris opus unghiului A. Acest cerc este tangent laturii BC în M şi dreptelor AB şi AC în K, respectiv în L. Dreptele LM şi BJ se intersectează în punctul F, iar dreptele KM şi CJ se intersectează punctul G. Notăm cu S punctul de intersecţie a dreptelor AF şi BC şi cu T punctul de intersecţie a dreptelor AG şi BC.

Arătaţi că M este mijlocul segmentului ST.

(Cercul *exînscris* triunghiului ABC opus unghiului A este cercul tangent laturii BC, semidreptei AB – dar nu laturii AB – şi semidreptei AC – dar nu laturii AC.)

Problema 2. Fie $n \geq 3$ un număr natural şi fie $a_2, a_3, \ldots, a_n$ numere reale pozitive astfel încât $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$. Arătaţi că

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \;>\; n^n.$$

Problema 3. Jocul *ghicitului cu minciuni* se desfăşoară între doi jucători A şi B. Regulile jocului depind de două numere naturale nenule k şi n cunoscute ambilor jucători.

Jocul începe prin alegerea de către A a unor numere naturale x şi N cu $1 \leq x \leq N$. Jucătorul A ţine numărul x secret şi îi comunică corect lui B numărul N. Jucătorul B încearcă în continuare să obţină informaţii despre x prin întrebări adresate lui A în felul următor: fiecare întrebare a lui B constă în alegerea unei mulţimi S de numere naturale nenule (eventual chiar una aleasă într-o întrebare anterioară) şi chestionarea lui A dacă x aparţine lui S. Jucătorul B poate pune oricâte întrebări.

Jucătorul A trebuie să răspundă imediat fiecărei întrebătri pusă de B cu *da* sau *nu*, dar poate să mintă de oricâte ori vrea, cu condiţia să nu mintă la $k+1$ întrebări consecutive.

După ce B a pus câte întrebări a dorit, el trebuie să prezinte o mulţime X de cel mult n numere naturale nenule. Dacă numărul x aparţine mulţimii X atunci B câştigă; altfel pierde. Arătaţi că:

1. Dacă $n \geq 2^k$, atunci B are o strategie câştigătoare;

2. Pentru orice k suficient de mare, există $n \geq 1.99^k$ astfel încât B nu poate garanta câştigarea jocului.

Day: 2

Miercuri, 11 iulie 2012

Problema 4. Determinaţi toate funcţiile $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ cu proprietatea că pentru orice numere întregi a, b, c având $a+b+c=0$, este adevărată egalitatea:

$$f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 \;=\; 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a).$$

($\mathbb{Z}$ este mulţimea numerelor întregi.)

Problema 5. Fie ABC un triunghi cu $\angle BCA = 90°$, şi fie D piciorul înălţimii din vârful C. Fie X un punct aparţinând interiorului segmentului CD. Fie K un punct aparţinând segmentului AX astfel încât $BK = BC$. Similar, fie L un punct aparţinând segmentului BX astfel încât $AL = AC$. Fie M punctul de intersecţie a dreptelor AL şi BK.

Arătaţi că $MK = ML$.

Problema 6. Determinaţi toate numerele naturale nenule n pentru care există numerele naturale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ astfel încât

$$\frac{1}{2^{a_1}} + \frac{1}{2^{a_2}} + \cdots + \frac{1}{2^{a_n}} \;=\; \frac{1}{3^{a_1}} + \frac{2}{3^{a_2}} + \cdots + \frac{n}{3^{a_n}} \;=\; 1.$$