

Examenul de bacalaureat 2012
Proba E.c)
Proba scrisă la MATEMATICĂ

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Calculați modulul numărului complex $(1+i)^2$.
- 5p** 2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2x$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x - 2$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $2^{x+1} \leq 4$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare una dintre submulțimile cu trei elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, elementele submulțimii alese să fie termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
- 5p** 5. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j}$ și $\vec{v} = a\vec{i} - \vec{j}$. Determinați numărul real a pentru care $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$.
- 5p** 6. Calculați cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB = 4$, $AC = 5$ și $BC = 7$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0, \text{ unde } m \in \mathbb{R}. \\ x + y + mz = 0 \end{cases}$$
- 5p** a) Calculați determinantul matricei sistemului.
- 5p** b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.
- 5p** c) În cazul $m = 2$, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului pentru care $x_0 > 0$ și $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3$.
2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și mulțimea $G = \{X(p) = I_2 + pA \mid p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}\}$.
- 5p** a) Arătați că $X(p) \cdot X(q) \in G$, pentru orice $X(p), X(q) \in G$.
- 5p** b) Admitem că (G, \cdot) este grup comutativ având elementul neutru $X(0)$. Determinați inversul elementului $X(p)$ în acest grup.
- 5p** c) Rezolvați ecuația $(X(p))^3 = I_2 + 7A$, unde $X(p) \in G$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 12x$.
- 5p** a) Arătați că funcția este crescătoare pe intervalul $[2, +\infty)$.
- 5p** b) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{f(x)}$.
- 5p** c) Determinați mulțimea numerelor reale a pentru care ecuația $f(x) = a$ are trei soluții reale distincte.
2. Se consideră funcția $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$.
- 5p** a) Arătați că orice primitivă a lui f este strict crescătoare pe $(-1, +\infty)$.
- 5p** b) Calculați $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx$.
- 5p** c) Calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\int_0^{2x} f(t) dt}$.

Examenul de bacalaureat 2012

Proba E.c)

Proba scrisă la MATEMATICĂ

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Varianta 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(1+i)^2 = 2i$ $ 2i = 2$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0$ $x_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -1$ $x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = 0$	1p 2p 2p
3.	$2^{x+1} \leq 2^2$ $x+1 \leq 2$ $S = (-\infty, 1]$	1p 2p 2p
4.	$p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$ Submulțimile cu 3 termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice sunt: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$ și $\{1,3,5\} \Rightarrow 4$ cazuri favorabile Numărul submulțimilor cu 3 elemente este $C_5^3 = 10 \Rightarrow 10$ cazuri posibile $p = \frac{2}{5}$	1p 2p 1p 1p
5.	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \Leftrightarrow a + 2 = 3$ $a = 1$	4p 1p
6.	$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC}$ $\cos A = -\frac{1}{5}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ $\det A = 3m - 6$	2p 3p
b)	Sistemul are o soluție unică dacă și numai dacă $\det A \neq 0$ Finalizare: $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$	2p 3p

c)	$\det A = 0$ și $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, deci matricea sistemului are rangul doi $z = \alpha \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = -3\alpha \\ x + 2y = -3\alpha \end{cases} \Rightarrow x = -\alpha, y = -\alpha$ $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 3 \Rightarrow (-\alpha)^2 + (-\alpha)^2 + \alpha^2 = 3 \Rightarrow \alpha \in \{-1, 1\}$ Soluția este $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, -1)$	<p>1p</p> <p>2p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
2.a)	$X(p) \cdot X(q) = X(p + q + pq)$ $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \Rightarrow (p+1)(q+1) \neq 0 \Rightarrow p + q + pq \neq -1$, deci $X(p + q + pq) \in G$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	Pentru orice $X(p) \in G$, există $X\left(-\frac{p}{1+p}\right)$ astfel încât $X(p) \cdot X\left(-\frac{p}{1+p}\right) = X(0)$ $-\frac{p}{1+p} \neq -1 \Rightarrow X\left(-\frac{p}{1+p}\right) \in G$ și $X\left(-\frac{p}{1+p}\right)$ este inversul lui $X(p)$	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	$(X(p))^3 = X(7)$ $(X(p))^3 = X((p+1)^3 - 1)$ $(p+1)^3 = 8$, deci $p = 1$ și soluția este $X(1)$	<p>1p</p> <p>3p</p> <p>1p</p>

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 3x^2 - 12$ $f'(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [2, +\infty)$, deci f este crescătoare pe $[2, +\infty)$	<p>3p</p> <p>2p</p>
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{3x^2 - 12} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{6} = +\infty$	<p>2p</p> <p>3p</p>
c)	Șirul lui Rolle pentru funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - a$ este $-\infty, 16 - a, -16 - a, +\infty$ Ecuația are trei soluții reale distincte dacă și numai dacă $a \in (-16, 16)$	<p>3p</p> <p>2p</p>
2.a)	$F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ $f(x) > 0$ pentru orice $x \in (-1, +\infty)$ F este strict crescătoare	<p>2p</p> <p>1p</p> <p>2p</p>
b)	$\int_0^1 \frac{f(x)}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x+1} + \int_0^1 \frac{dx}{x+2} =$ $= \ln(x+1) \Big _0^1 + \ln(x+2) \Big _0^1 = \ln 3$	<p>3p</p> <p>2p</p>
c)	$\int_x^{2x} f(t) dt = (2t - \ln(t+2)) \Big _x^{2x} = 2x - \ln \frac{2x+2}{x+2}$, pentru $x > 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \ln \frac{2x+2}{x+2}}{x} = 2$	<p>3p</p> <p>2p</p>