Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a IX-a, Etapa a III-a, 6 mai 2012

Clasa a V-a

I. Fie numărul natural $m = 1112131415...49$

(4p) **a)** Câte cifre are numărul m?

(5p) **b)** Să se determine a 30-a cifră a numărului m.

II. *(4p)* **a)** Să se afle câți divizori are numărul 900.

(5p) **b)** Demonstrați că dacă un număr are un număr impar de divizori atunci el este pătrat perfect.

Prof. Liviu Oprişescu

III. *(4p)* **a)** Aflați numărul $\overline{abcd}$ ştiind că dacă împărțim pe 2012 la $\overline{aa}$ obținem câtul $\overline{bb}$ şi restul $\overline{cd}$.

(5p) **b)** Aflați numerele $\overline{abcd}$ ştiind că dacă împărțim pe 2012 la $\overline{aaa}$ obținem câtul b şi restul $\overline{cd}$.

Prof. Traian Preda

IV. *(4p)* **1)** Aflați $a,b,c \in N^*$ astfel încât $2a+3b+5c=30$ şi $a \neq b \neq c \neq a$.

Prof. Olteanu Cristian

(5p) **2)** Un elev a scris într-o anumită ordine toate pătratele perfecte de la 1^2 la 99^2, obținând astfel numărul n. Să se demonstreze că numărul obținut nu este pătrat perfect.

Andrei Bobulişteanu şi Adrian Zahariuc

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.

Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.

Timp de lucru: **2 ore 30 min.**

Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a IX-a, Etapa a III-a, 6 mai 2012

Clasa a VI-a

I. *(4p)* **a)** Să se afle restul împărțirii numărului 1193 la 30.

(5p) **b)** Să se arate că restul împărțirii a unui număr prim la 30 este de asemenea un număr prim sau este egal cu 1.

II. Se consideră mulțimile disjuncte A și B astfel încât $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ și astfel încât produsul elementelor mulțimii A să fie egal cu suma elementelor mulțimii B.

(2p) **a)** Să se arate că A are cel mult 4 elemente.

(2p) **b)** Să se arate că A nu poate avea exact 2 elemente.

(2p) **c)** Demonstrați că $A \cap \{1,2\} \neq \emptyset$

(3p) **d)** Să se determine mulțimile A și B.

prof. Traian Preda

III. *(4p)* Fie ΔABC și M mijlocul lui (BC). Demonstrați că dacă există $T \in (AM)$ astfel încât $(BT) \equiv (CT)$ atunci $(AB) \equiv (AC)$.

(5p) Să se arate că dacă în plus $m(\sphericalangle TAB) = m(\sphericalangle TBC) = m(\sphericalangle TCA)$ atunci ΔABC este echilateral.

Prof. Olteanu Cristian

IV. Se consideră punctele coliniare A, M, B în această ordine astfel încât $[AM] \not\equiv [MB]$ și punctele C și D în semiplane opuse față de dreapta AB astfel încât $AC \perp AB$, $[AC] \equiv [MB]$, $BD \perp AB$, $[BD] \equiv [AM]$.

(4p) **a)** Demonstrați că punctele C, M, D nu sunt coliniare și că ΔCMD este isoscel.

(5p) **b)** Fie punctul $P \in BD$ astfel încât $CM \perp MP$ și punctele N, Q unde $CD \cap AB = \{N\}$, $PN \cap AC = \{Q\}$. Demonstrați că $QM \perp MD$.

Prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.

Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă.

Timp de lucru: **2 ore 30 min.**

Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a IX-a, Etapa a III-a, 6 mai 2012

Clasa a VII-a

I. *(4p)* **a)** Să se demonstreze identitatea:

$$\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(c^2+d^2\right)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

(5p) **b)** Să se arate că:

$$\sqrt{\left(1+2009^2\right)\cdot\left(1+2012^2\right)-9}\in N.$$

Prof. N.M. Goşoniu

II. *(4p)* **a)** Dacă $a,b,c\in R$, să se arate că are loc relația

$$4\cdot\left(a^2+b^2+c^2\right)=(a+b+c)^2+(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2$$

(5p) **b)** Se consideră numărul par $\overline{abcd}$ astfel încât $\overline{ab}$ şi $\overline{cd}$ sunt pătrate perfecte. Să se arate că $\overline{abcd}$ este suma a patru pătrate perfecte.

Gh. Stoica, Petroşani

III. *(9p)* Fie triunghiul dreptunghic ABC, $m\left(\widehat{BAC}\right)=90^\circ$, AD perpendiculară pe BC, $D\in(BC)$, $M\in(AD)$, $N\in(BD)$. Să se arate că MN este paralelă cu AB dacă şi numai dacă $\widehat{BAN}\equiv\widehat{ACM}$.

Prof. Ion Neață, Slatina, Olt

IV. *(9p)* Fie ABCD un paralelogram şi punctele $N\in(AC)$, $M\in(AB)$ astfel încât $AN=3NC$ şi $(AM)\equiv(MB)$.

Prin punctul $Q\in(BC)$ ducem o paralelă la AB care intersectează diagonala AC în punctul T.

Dacă R este mijlocul segmentului AT şi $MN\cap QR=\{S\}$, demonstrați că S este mijlocul segmentului RQ.

Prof. Traian Preda

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.

Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă şi completă, indiferent de metodă.

Timp de lucru: 3 ore.

Concursul Național de Matematică "Arhimede"

Ediția a IX-a, Etapa a III-a, 6 mai 2012

Clasa a VIII-a

I. Fie numerele:

$$a=\sqrt{4+\sqrt{2}+\sqrt{5}+\sqrt{10}} \quad \text{și} \quad b=\sqrt{4-\sqrt{10}+\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

(4p) **i)** Arătați că $a+b=\sqrt{10}+\sqrt{2}$

(5p) **ii)** $(a-1)(b+1)=3+\sqrt{5}$

Prof. Ion Neață, Slatina, Olt

II. *(4p)* **a)** Fie $a,b,c \in R_+$ astfel încât $abc \geq 1$.

Demonstrați că: $(1+ab)(1+ac)(1+bc) \geq (1+a)(1+b)(1+c)$

(5p) **b)** Fie $a,b,c,x,y,z \in R_+$ astfel încât $abc \geq xyz$

Demonstrați că: $(xy+ab)(xz+ac)(yz+bc) \geq xyz(a+x)(b+y)(c+z)$

Prof. Traian Preda

III. *(9p)* Se consideră 4 puncte necoplanare A,B,C,D . Să se determine numărul planelor α pentru care $d(A,\alpha)=d(B,\alpha)=d(C,\alpha)=d(D,\alpha)$, unde prin $d(M,\alpha)$ înțelegem distanța de la punctul M la planul α.

IV. În spațiu se consideră punctele coliniare A,B,C,D în această ordine și punctele E și F astfel încât sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $m(\widehat{AEC})=m(\widehat{AFD})=90^\circ$

b) $(AEC)\perp(ADF)$

c) $AD\perp(BEF)$

Știind că $AB=a$, $BE=b$, $BF=c$, $c>b$, să se calculeze în funcție de a,b,c:

(4p) **1)** $\sin\sphericalangle((ECF),(EDF))$

(5p) **2)** distanța dintre dreptele FD și CE.

Prof. Traian Pred

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. La fiecare subiect se acordă 1 punct din oficiu.

Punctajul maxim se acordă pentru orice rezolvare corectă și completă, indiferent de metodă.

Timp de lucru: **3 ore.**