



Language: Romanian

Sâmbătă, 28 aprilie 2012

**Problema 1.** Fie punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  pe cercul  $\Gamma$  de centru  $O$  astfel încât  $\angle ABC > 90^\circ$ . Fie  $D$  punctul de intersecție a dreptei  $AB$  cu perpendiculara în punctul  $C$  pe dreapta  $AC$ . Fie  $\ell$  perpendiculara pe dreapta  $AO$  care trece prin punctul  $D$ . Fie  $E$  punctul de intersecție a dreptei  $\ell$  cu dreapta  $AC$  și fie  $F$  punctul de intersecție a cercului  $\Gamma$  cu dreapta  $\ell$  care se află între  $D$  și  $E$ .

Să se demonstreze că cercurile circumscrise triunghiurilor  $BFE$  și  $CFD$  sunt tangente în  $F$ .

**Problema 2.** Să se demonstreze că

$$\sum_{\text{circ}} (x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} \geq 4(xy+yz+zx),$$

pentru orice numere reale strict pozitive  $x$ ,  $y$  și  $z$ .

În notația de mai sus, membrul stâng al inegalității este egal cu:

$$(x+y)\sqrt{(z+x)(z+y)} + (y+z)\sqrt{(x+y)(x+z)} + (z+x)\sqrt{(y+z)(y+x)}.$$

**Problema 3.** Fie  $n$  un număr natural nenul. Fie  $P_n = \{2^n, 2^{n-1} \cdot 3, 2^{n-2} \cdot 3^2, \dots, 3^n\}$ . Pentru fiecare submulțime  $X$  a lui  $P_n$  notăm cu  $S_X$  suma tuturor elementelor lui  $X$ , cu convenția că  $S_\emptyset = 0$ , unde  $\emptyset$  este mulțimea vidă. Fie  $y$  un număr real astfel încât  $0 \leq y \leq 3^{n+1} - 2^{n+1}$ .

Să se arate că există o submulțime  $Y$  a lui  $P_n$  astfel încât  $0 \leq y - S_Y < 2^n$ .

**Problema 4.** Fie  $\mathbb{N}^*$  mulțimea numerelor naturale nenule. Să se determine toate funcțiile  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  care îndeplinesc simultan următoarele două proprietăți:

- (i)  $f(n!) = f(n)!$  pentru orice număr natural nenul  $n$ ,
- (ii)  $m - n$  divide  $f(m) - f(n)$  pentru orice numere naturale nenule diferite  $m$  și  $n$ .

Fiecare problemă este notată cu 10 puncte.

Timp de lucru: 4 ore și 30 de minute.