Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Finală, Constanţa, 3 Aprilie 2012

CLASA a X-a

Problema 1. Fie mulţimea $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \operatorname{Re} z \in \mathbb{Q}\}$. Demonstraţi că în planul complex există o infinitate de triunghiuri echilaterale care au toate afixele vârfurilor în mulţimea M.

Problema 2. Se consideră trei numere complexe a, b şi c, astfel încât $a+b+c=0$ şi $|a|=|b|=|c|=1$. Demonstraţi că

$$3 \leq |z-a|+|z-b|+|z-c| \leq 4,$$

oricare ar fi numărul complex z, cu $|z| \leq 1$.

Problema 3. Fie numerele reale a şi b, cu $0 < a < b$. Demonstraţi:

a) $2\sqrt{ab} \leq \dfrac{x+y+z}{3} + \dfrac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leq a+b$, pentru $x, y, z \in [a,b]$.

b) $\left\{ \dfrac{x+y+z}{3} + \dfrac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \,\middle|\, x,y,z \in [a,b] \right\} = \left[2\sqrt{ab}, a+b \right]$.

Problema 4. Fie n şi m două numere naturale, $m \geq n \geq 2$. Determinaţi numărul funcţiilor injective

$$f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$$

cu proprietatea că există şi este unic un număr $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ pentru care $f(i) > f(i+1)$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Finală, Constanţa, 3 Aprilie 2012

CLASA a X-a
Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Fie mulţimea $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \text{ Re } z \in \mathbb{Q}\}$. Demonstraţi că în planul complex există o infinitate de triunghiuri echilaterale care au toate afixele vârfurilor în mulţimea M.

Soluţie. Fie $z = a + bi$ un număr complex din M. Atunci $a \in \mathbb{Q}$ şi $a^2 + b^2 = 1$. Un triunghi echilateral cu afixele vârfurilor în mulţimea M, dintre care unul egal cu z, are celelalte două vârfuri în punctele de afixe

$$z(-1/2 \pm (i\sqrt{3})/2),$$

.... **2 puncte**
numere având părţile reale egale cu $-a/2 \pm (b\sqrt{3})/2$. Cum $a \in \mathbb{Q}$, rezultă că $-a/2 \pm (b\sqrt{3})/2 \in \mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$.
.... **1 punct**

Fie $q = b/\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Problema revine la a demonstra că există o infinitate de soluţii $(a, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ale ecuaţiei $a^2 + 3q^2 = 1$, i.e. ecuaţia $m^2 + 3n^2 = p^2$ admite o infinitate de soluţii $(m, n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
.... **1 punct**

Cum $3n^2 = (p - m)(p + m)$, căutăm soluţii pentru care $p - m = 3$ şi $p + m = n^2$. Avem $n^2 = 2m + 3$, deci n este impar.
.... **1 punct**

Alegând $n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}^*$, obţinem $m = 2k^2 + 2k - 1$ şi $p = 2k^2 + 2k + 2$. Atunci $a = (2k^2 + 2k - 1)/(2k^2 + 2k + 2)$, $b = ((2k + 1)\sqrt{3})/(2k^2 + 2k + 2)$, iar $z = a + bi$ are modulul 1 şi $a, b > 0$, deci triunghiul echilateral cu un vârf în z este unic determinat. Cum $k \in \mathbb{N}^*$ este ales arbitrar, rezultă că există o infinitate de triunghiuri cu proprietatea cerută.
.... **2 puncte**

Problema 2. Se consideră trei numere complexe a, b şi c, astfel încât $a+b+c = 0$ şi $|a| = |b| = |c| = 1$. Demonstraţi că $3 \leq |z-a|+|z-b|+|z-c| \leq 4$, oricare ar fi numărul complex z, cu $|z| \leq 1$.

Soluţie. Considerăm punctele A, B, C şi M având afixele a, b, c şi respectiv z. Atunci triunghiul ABC este echilateral, înscris în cercul de rază 1 centrat în originea O a planului complex.
.... **1 punct**

Pentru inegalitatea din stânga, avem succesiv

$$\sum |z - a| = \sum |\overline{a}||z - a| = \sum |\overline{a}z - \overline{a}a| \geq$$
$$\geq |\sum \overline{(}az - 1)| = |z(\sum \overline{a}) - 3| = 3.$$

.... **2 puncte**

Demonstrăm inegalitatea din dreapta. Considerăm o coardă care trece prin M şi fie P, Q punctele sale de intersecţie cu cercul circumscris triunghiului ABC. Fie p şi q afixele punctelor P şi Q. Există $\alpha \in [0,1]$ astfel ca $m = \alpha p + (1-\alpha)q$. Prin urmare

$$\sum |z-a| = \sum |\alpha p + (1-\alpha)q - a| \leq \alpha \sum |p-a| + (1-\alpha)\sum |q-a|,$$

deci

$$\sum |z-a| \leq \max\left\{\sum |p-a|, \sum |q-a|\right\}.$$

.... **2 puncte**

Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $\max\{\sum |p-a|, \sum |q-a|\} = \sum |p-a|$ şi că P este poziţionat pe cerc între A şi C. Din identitatea lui Ptolemeu obţinem $PA + PC = PB$, adică $|p-a| + |p-c| = |p-b|$. Atunci $\sum |z-a| \leq \sum |p-a| = 2|p-b| \leq 4$, ceea ce trebuia demonstrat.

.... **2 puncte**

Notă. Egalitatea din membrul stâng se realizează în cazul $z = 0$, iar pentru membrul drept dacă $z \in \{-a, -b, -c\}$.

Problema 3. Fie numerele reale a şi b, cu $0 < a < b$. Demonstraţi:

a) $2\sqrt{ab} \leq \dfrac{x+y+z}{3} + \dfrac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leq a+b$, pentru $x, y, z \in [a,b]$.

b) $\left\{\dfrac{x+y+z}{3} + \dfrac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \,\middle|\, x, y, z \in [a,b]\right\} = \left[2\sqrt{ab}, a+b\right]$.

Soluţie. a) Aplicând inegalitatea mediilor obţinem

$$\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \sqrt[3]{xyz} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \geq 2\sqrt{ab}.$$

.... **1 punct**

Din inegalitatea mediilor avem

$$\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leq \frac{x+y+z}{3} + \frac{ab(1/x+1/y+1/z)}{3} = \frac{1}{3}(f(x)+f(y)+f(z)),$$

.... **1 punct**

unde $f:(0,\infty) \to (0,\infty)$, $f(t) = t + \frac{ab}{t}$. Avem

$$t(a+b-f(t)) = (b-t)(t-a) \geq 0, t \in [a,b],$$

de unde rezultă că $f(t) \leq a+b$, $t \in [a,b]$.

.... **1 punct**

Atunci $f(x)+f(y)+f(z) \leq 3(a+b)$, de unde rezultă $\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} \leq a+b$.

.... **1 punct**

b) Conform punctului anterior, este suficient să demonstrăm că intervalul $[2\sqrt{ab}, a+b]$ este inclus în mulţimea din membrul stâng. Vom arăta că

$$[2\sqrt{ab}, a+b] \subset f([a,b]).$$

Pentru aceasta, fie $s \in [2\sqrt{ab}, a+b]$. Ecuaţia $f(t) = s$ este echivalentă cu $t^2 - st + ab = 0$. Deoarece $s \geq 2\sqrt{ab}$, discriminantul $s^2 - 4ab$ este pozitiv, deci ecuaţia admite soluţii reale,

.... **1 punct**

care aparţin intervalului $[a,b]$.

.... **1 punct**

Alegând $x = y = z = \frac{s \pm \sqrt{s^2-4ab}}{2}$ obţinem $\frac{x+y+z}{3} + \frac{ab}{\sqrt[3]{xyz}} = s$, de unde rezultă cerinţa.

.... **1 punct**

Problema 4. Fie n şi m două numere naturale, $m \geq n \geq 2$. Determinaţi numărul funcţiilor injective $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$ cu proprietatea că există şi este unic un număr $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ pentru care $f(i) > f(i+1)$.

Soluţie. Problema cere determinarea numărului de funcţii care sunt strict crescătoare pe mulţimile $\{1,2,\ldots,i-1,i\}$ şi pe $\{i+1,i+2,\ldots,n\}$, dar care nu sunt strict crescătoare pe mulţimea $\{1,2,\ldots,n\}$.

.... **1 punct**

Imaginea unei funcţii injective $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$ este o mulţime cu exact n elemente. Pentru o funcţie $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,m\}$ cu proprietatea cerută notăm cu A imaginea sa şi fie g unica funcţie strict crescătoare de la A la $\{1,2,\ldots,n\}$. Evident, g este funcţie bijectivă.

Rezultă că $h = g \circ f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ este o funcţie bijectivă cu proprietatea din enunţ. Într-adevăr, fie $i \in \{1,2,\ldots,n-1\}$ pentru care $f(1) < \cdots < f(i)$, $f(i) > f(i+1)$ şi $f(i+1) < \cdots < f(n)$. Cum g este funcţie strict crescătoare, deducem că $g(f(1)) < \cdots < g(f(i))$, $g(f(i)) > g(f(i+1))$ şi $g(f(i+1)) < \cdots < g(f(n))$, adică $h(1) < \cdots < h(i)$, $h(i) > h(i+1)$ şi $h(i+1) < \cdots < h(n)$.

.... **1 punct**

Vom arăta că funcţiei h îi corespunde unic o submulţime M a mulţimii $\{0,1,2\ldots,n\}$, alta decât $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1,2\}$, ..., $\{1,2,\ldots,n\}$.

Pentru fiecare $i \in \{0,1,2\ldots,n\}$, alegem o submulţime M a mulţimii $\{1,2,\ldots,n\}$ având i elemente. Funcţia h este unic determinată de n–uplul $(h(1), h(2), \ldots, h(n))$, care se obţine ordonând crescător mai întâi elementele mulţimii M, iar apoi elementele mulţimii $\{1,2,\ldots,n\} \setminus M$.

.... **2 puncte**

Pentru ca h să nu fie strict crescătoare pe $\{1,2,\ldots,n\}$, mulţimea M cu card $M = i$ trebuie să fie diferită de $\{1,2,\ldots,i\}$.

.... **1 punct**

Deoarece sunt 2^n submulţimi ale mulţimii $\{1, 2, \ldots, n\}$, iar $n+1$ dintre acestea – anume $\emptyset$, $\{1\}$, $\{1, 2\}, \ldots$, $\{1, 2, \ldots, n\}$ – nu convin, rezultă că sunt $2^n - n - 1$ funcţii bijective $h = g \circ f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ cu proprietatea cerută.

.... **1 punct**

Cum imaginea $A \subset \{1, 2, \ldots, m\}$ cu n elemente poate fi aleasă în C_m^n moduri, rezultă că sunt $C_m^n(2^n - n - 1)$ funcţii injective $f = g^{-1} \circ h : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, m\}$ cu proprietatea din enunţ.

.... **1 punct**

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a XI-a

Problema 1. Fie funcţiile $f, g : [0,1] \to [0,1]$ astfel încât g este monotonă şi surjectivă şi

$$|f(x) - f(y)| \leq |g(x) - g(y)|,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că f este continuă şi că există $x_0 \in [0,1]$, cu $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Arătaţi că mulţimea punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) = g(x)$ este un interval închis.

Problema 2. Fie n şi k două numere naturale astfel încât $n \geq 2$ şi $1 \leq k \leq n-1$. Arătaţi că dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are exact k minori nuli de ordin $n-1$, atunci $\det(A) \neq 0$.

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ şi $\det(A^2 + AB + B^2) = 0$. Arătaţi că

$$\det(A+B) + 3\det(A-B) = 6\det(A) + 6\det(B).$$

Problema 4. Determinaţi funcţiile derivabile $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ pentru care $f(0) = 0$ şi $f'(x^2) = f(x)$ pentru orice $x \in [0,\infty)$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a XI-a, SOLUŢII ŞI BAREME

Problema 1. Fie funcţiile $f, g : [0,1] \to [0,1]$ astfel încât g este monotonă şi surjectivă şi

$$|f(x) - f(y)| \le |g(x) - g(y)|,$$

oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că f este continuă şi că există $x_0 \in [0,1]$, cu $f(x_0) = g(x_0)$.

b) Arătaţi că mulţimea punctelor $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) = g(x)$ este un interval închis.

Soluţie. a) Cum g este monotonă, are limite laterale în fiecare punct. Arătăm că g este continuă. Altfel, fie x_0 un punct în care $g(x_0 - 0) < g(x_0) \le g(x_0+0)$ sau $g(x_0-0) \le g(x_0) < g(x_0+0)$. Atunci intervalul $(g(x_0-0), g(x_0+0))$ nu este inclus în imaginea funcţiei, contrazicând surjectivitatea. Din inegalitatea din ipoteză rezultă şi continuitatea funcţiei f. . . 2 puncte

Considerăm funcţia h dată de $h(x) = g(x) - f(x)$. Avem $h(0)h(1) = (g(0) - f(0))(g(1) - f(1)) \le 0$, deoarece g este monotonă şi surjectivă. Proprietatea valorilor intermediare pentru funcţii continue implică existenţa unui punct $x_0 \in [0,1]$ cu $h(x_0) = 0$ adică $f(x_0) = g(x_0)$. . . . . 1 punct

b) Fie $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) = g(x)\}$. Dacă A are un singur element nu mai e nimic de arătat. Dacă A are cel puţin două elemente fie $\alpha = \inf A, \beta = \sup A$. Din continuitatea funcţiilor f şi g deducem că $\alpha, \beta \in A$. . . . 1 punct

Fie $x, y \in [\alpha, \beta]$, $x < y$. Dacă g este crescătoare avem $f(y) - f(x) \le |f(x) - f(y)| \le |g(y) - g(x)| = g(y) - g(x)$. Prin urmare $f(y) - g(y) \le f(x) - g(x)$, deci h este descrescătoare pe $[\alpha, \beta]$. Cum $h(\alpha) = h(\beta) = 0$ rezultă $h = 0$ pe $[\alpha, \beta]$ adică $A = [\alpha, \beta]$ . . . . 3 puncte

Problema 2. Fie n şi k două numere naturale astfel încât $n \ge 2$ şi $1 \le k \le n-1$. Arătaţi că dacă matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ are exact k minori nuli de ordin $n-1$, atunci $\det(A) \ne 0$.

Soluţie. Presupunem că $\det(A) = 0$. Cum A are n^2 minori de ordinul $n-1$ şi $n^2 > n-1$, rezultă că A are cel puţin un minor nenul de ordin $n-1$, deci $\text{rang}(A) = n-1$ . . . . 2 puncte

Cum $A^*A = O_n$ şi din inegalitatea Sylvester $0 = \text{rang}(AA^*) \ge \text{rang}(A) + \text{rang}(A^*) - n$ rezultă că $\text{rang}(A^*) \le 1$ . . 1 punct

Din $A^* \ne O_n$ rezultă $\text{rang}(A^*) = 1$ . . . . 1 punct

Deoarece A^* are cel puţin $n^2 - n + 1$ elemente nenule, deducem că are o linie cu toate elementele nenule. Fie aceasta L_1 şi fie L_2 linia din A^* care conţine cel puţin un element nul (o astfel de linie există căci $k \ge 1$). Cum L_1 şi L_2 sunt proporţionale, există $\alpha \in \mathbb{C}$ astfel încât $L_2 = \alpha L_1$ . . . 2 puncte

De aici deducem $\alpha = 0$ deci L_2 are toate elementele nule ceea ce atrage că A are cel puţin n minori de ordin $n-1$ nuli, absurd . . . . 1 punct

Problema 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$ şi $\det(A^2 + AB + B^2) = 0$. Arătaţi că

$$\det(A + B) + 3\det(A - B) = 6\det(A) + 6\det(B).$$

Soluţie. Avem $A^2 + AB + B^2 = (A - \omega B)(A - \bar{\omega} B)$, unde ω este o rădăcină cubică nereală a unităţii. ....1 punct

Considerăm funcţia polinomială de grad 4 definită prin $f(x) = \det(A + xB) = \det A + ax + bx^2 + cx^3 + \det Bx^4$. Condiţia din enunţ se transcrie (matricile având elemente reale) $f(\omega) = f(\bar{\omega}) = 0$ .... 1 punct

Avem

$$f(\omega) = \det A + c + \omega(a + \det B) + \omega^2 b,$$

deci $\det A + c = a + \det B = b$. (1) ....2 puncte

Cum $f(1) = \det A + a + b + c + \det B$ şi $f(-1) = \det A - a + b - c + \det B$, avem $f(1) + f(-1) = 2\det A + 2\det B + 2b$, iar din relaţiile (1) $2b = a + c + \det A + \det B = \frac{1}{2}(f(1) - f(-1)) + \det A + \det B$. .... 2 puncte

Cum $f(1) = \det(A + B)$ şi $f(-1) = \det(A - B)$ deducem relaţia din enunţ. .... 1 punct

Problema 4. Determinaţi funcţiile derivabile $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ pentru care $f(0) = 0$ şi $f'(x^2) = f(x)$ pentru orice $x \in [0, \infty)$.

Soluţie. Arătaăm că $f = 0$.

Din relaţia dată, pentru orice $x \geq 0$ avem $f'(x) = f(\sqrt{x}) \geq 0$, deci f este crescătoare, de unde f' rezultă crescătoare. .... 2 puncte

Fie $a = \sup\{x \,|\, f(x) = 0\}$. Dacă $a \in [0, \infty)$ atunci $f(x) = 0$ pe intervalul $[0, a]$ şi $f(x) > 0$ pe (a, ∞) (datorită continuităţii şi monotoniei funcţiei f). 1 punct

Din teorema lui Lagrange aplicată pe intervalul $[a, a + 1]$ deducem că $f(a + 1) = f'(c)$, cu $c \in (a, a + 1)$. ....1 punct

Atunci $f(a + 1) = f(\sqrt{c})$ şi cum f este crescătoare rezultă că este constantă pe intervalul $[\sqrt{c}, a + 1]$ deci f' este nulă pe acest interval. Aşadar $f'(a + 1) = f'(0) = 0$ şi cum f' este crescătoare rezultă $f' = 0$ pe $[0, a + 1]$. De aici $f'(c) = 0 = f(a + 1)$, absurd. ....3 puncte

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, astfel încât

$$\int_0^n f(x) f(n-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n (f(x))^2\,\mathrm{d}x,$$

oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$. Să se arate că funcţia f este periodică.

Problema 2. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel şi f un endomorfism surjectiv al său, astfel încât $[x, f(x)] = 0$ oricare ar fi $x \in R$, unde $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in R$. Să se arate că:

(a) $[x, f(y)] = [f(x), y]$ şi $x[x, y] = f(x)[x, y]$, oricare ar fi $x, y \in R$;

(b) Dacă R este corp şi f este diferit de identitate, atunci R este comutativ.

Problema 3. Fie $\mathcal{C}$ mulţimea funcţiilor integrabile $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, astfel încât $0 \leq f(x) \leq x$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Definim funcţia $V : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ prin

$$V(f) = \int_0^1 (f(x))^2\,\mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2, \quad f \in \mathcal{C}.$$

Să se determine următoarele două mulţimi:

(a) $\{V(f_a) \,|\, 0 \leq a \leq 1\}$, unde $f_a(x) = 0$, dacă $0 \leq x \leq a$, şi $f(x) = x$, dacă $a < x \leq 1$;

(b) $\{V(f) \,|\, f \in \mathcal{C}\}$.

Problema 4. Fie m şi n două numere naturale nenule. Să se determine numărul minim de rădăcini complexe distincte ale polinomului $\prod_{k=1}^{m}(f + k)$, când f parcurge mulţimea polinoamelor de grad n cu coeficienţi complecşi.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Clasa a XII-a — Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă, astfel încât

$$\int_0^n f(x)f(n-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^n (f(x))^2\,\mathrm{d}x,$$

oricare ar fi numărul natural $n \geq 1$. Să se arate că funcţia f este periodică.

Soluţie. Fie n un număr natural nenul. Cu substituţia $y = n - x$, obţinem

$$\int_0^n f(n-y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^n (f(n-y))^2\,\mathrm{d}y.$$

.... **2 puncte**

Prin adunarea acestei relaţii cu cea din enunţ, rezultă

$$\int_0^n (f(x) - f(n-x))^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Din continuitatea lui f deducem că $f(x) = f(n-x)$ pentru orice $x \in [0, n]$.

.... **3 puncte**

Fie $x \geq 0$ şi $n \geq x$ un număr natural nenul. Atunci

$$f(x+1) = f(n+1-x-1) = f(n-x) = f(x).$$

.... **2 puncte**

Problema 2. Fie $(R, +, \cdot)$ un inel şi f un endomorfism surjectiv al său, astfel încât $[x, f(x)] = 0$ oricare ar fi $x \in R$, unde $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in R$. Să se arate că:

(a) $[x, f(y)] = [f(x), y]$ şi $x[x, y] = f(x)[x, y]$, oricare ar fi $x, y \in R$;

(b) Dacă R este corp şi f este diferit de identitate, atunci R este comutativ.

Soluţie. **(a)** Demonstrăm prima relaţie:

$$\begin{aligned} 0 &= [x-y, f(x-y)] = [x-y, f(x) - f(y)] \\ &= [x, f(x)] - [x, f(y)] - [y, f(x)] + [y, f(y)] = -[x, f(y)] + [f(x), y]. \end{aligned}$$

. . . . **2 puncte**

Demonstraţia celei de a doua relaţii face apel la prima. Fie $y = f(z)$, $z \in R$. Atunci

$$\begin{aligned} x[x, y] &= x[x, f(z)] = x[f(x), z] = xf(x)z - xzf(x) = f(x)xz - xzf(x) \\ &= [f(x), xz] = [x, f(xz)] = [x, f(x)y] = xf(x)y - f(x)yx \\ &= f(x)xy - f(x)yx = f(x)[x, y]. \end{aligned}$$

. . . . **2 puncte**

(b) Arătăm că $R^* = Z(R^*) = \{x : x \in R^*, xy = yx \text{ oricare ar fi } y \in R^*\}$, centrul grupului multiplicativ R^*. Fie $\operatorname{Fix} f = \{x : x \in R^*, f(x) = x\}$. Din a doua egalitate de la punctul **(a)**, rezultă că $R^* \setminus Z(R^*) \subseteq \operatorname{Fix} f$, deci $R^* = Z(R^*) \cup \operatorname{Fix} f$. Întrucât $Z(R^*)$ şi $\operatorname{Fix} f$ sunt şi subgrupuri ale lui R^*, sau $\operatorname{Fix} f \subseteq Z(R^*)$, caz în care $R^* = Z(R^*)$; sau $Z(R^*) \subseteq \operatorname{Fix} f$, caz în care $R^* = \operatorname{Fix} f$, i.e., f este identitatea — contradicţie. Prin urmare, $R^* = Z(R^*)$, i.e., R^* este comutativ.

. . . . **3 puncte**

Remarci. Un endomorfism cu proprietatea din enunţ se numeşte endomorfism *comutativ.* Un inel *prim* este un inel care are următoarea proprietate: dacă produsul a două ideale este nul, atunci cel puţin unul dintre cele două ideale este nul. Folosind a doua relaţie de la punctul **(a)**, se poate demonstra că un inel prim care posedă un automorfism comutativ diferit de identitate, este comutativ şi integru (fără divizori ai lui zero).

Teorema lui Wedderburn — orice corp finit este comutativ — este un caz particular al rezultatului de la punctul **(b)**: cu excepţia cazului trivial al corpului cu p elemente (p prim), orice corp finit de caracteristică p admite un automorfism comutativ diferit de identitate — automorfismul Frobenius, $x \mapsto x^p$.

Problema 3. Fie $\mathcal{C}$ mulţimea funcţiilor integrabile $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, astfel încât $0 \leq f(x) \leq x$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Definim funcţia $V : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ prin

$$V(f) = \int_0^1 (f(x))^2 \, \mathrm{d}x - \left(\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x \right)^2, \quad f \in \mathcal{C}.$$

Să se determine următoarele două mulţimi:

(a) $\{V(f_a) \,|\, 0 \leq a \leq 1\}$, unde $f_a(x) = 0$, dacă $0 \leq x \leq a$, şi $f(x) = x$, dacă $a < x \leq 1$;

(b) $\{V(f) \mid f \in \mathcal{C}\}$.

Soluţie. (a) Mulţimea cerută este intervalul închis $[0, 5(3-\sqrt{5})/24]$:

$$V(f_a) = \int_a^1 x^2\,\mathrm{d}x - \left(\int_a^1 x\,\mathrm{d}x\right)^2 = (1-a^3)/3 - (1-a^2)^2/4$$

este o funcţie polinomială al cărei punct de maxim pe $[0,1]$ este $(\sqrt{5}-1)/2$. Concluzia rezultă din monotonia acestei funcţii.

.... **3 puncte**

(b) Arătăm că această mulţime este inclusă în mulţimea de la punctul **(a)**. Fie $f \in \mathcal{C}$. Vom demonstra că există a în $[0,1]$, astfel încât $V(f) \le V(f_a)$.

....**1 punct**

Fie

$$a = \left(1 - 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \in [0,1].$$

Atunci

$$\int_0^1 f_a(x)\,\mathrm{d}x = (1-a^2)/2 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$\begin{aligned} V(f_a) - V(f) &= \int_0^1 \left((f_a(x))^2 - (f(x))^2\right)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x f_a(x) - (f(x))^2\right)\,\mathrm{d}x \\ &\ge \int_0^1 x\left(f_a(x) - f(x)\right)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

....**1 punct**

Vom arăta că ultima integrală este pozitivă. Considerăm funcţia integrabilă $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = f_a(x) - f(x)$. Mai întâi demonstrăm că

$$\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t \ge 0$$

oricare ar fi $x \in [0,1]$. Considerăm cele două cazuri posibile: dacă $0 \le x \le a$, atunci

$$\begin{aligned} \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t &= \int_x^1 \left(f_a(t) - f(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f_a(t)\,\mathrm{d}t - \int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t \\ &\ge \int_0^1 f_a(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,; \end{aligned}$$

iar dacă $a \le x \le 1$, atunci

$$\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^1 (f_a(t) - f(t))\,\mathrm{d}t = \int_x^1 (t - f(t))\,\mathrm{d}t \ge 0.$$

....**1 punct**

Aplicând formula a doua de medie, rezultă că există $b \in [0,1]$ astfel încât

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^1 g(x)\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

de unde concluzia.

....**1 punct**

Remarci. (1) Inegalitatea

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x \ge 0$$

poate fi demonstrată şi fără formula de medie. Fie n un număr natural nenul. Atunci:

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)\,\mathrm{d}x\right) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dacă $M = \sup\{|g(x)| : 0 \le x \le 1\}$, atunci

$$\left|\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left(x - \frac{k}{n}\right) |g(x)|\,\mathrm{d}x$$
$$\le \frac{M}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) = \frac{M}{n}.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \left(\int_{k/n}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{(k+1)/n}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \int_{k/n}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x +\\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \int_{k/n}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k/n}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

de unde concluzia.

(2) O altă posibilitate este integrarea prin părţi pentru integrale Lebesgue:

$$\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x.$$

Problema 4. Fie m şi n două numere naturale nenule. Să se determine numărul minim de rădăcini complexe distincte ale polinomului $\prod_{k=1}^{m}(f+k)$, când f parcurge mulţimea polinoamelor de grad n cu coeficienţi complecşi.

Soluţie. Minimumul cerut este $n(m-1)+1$ şi e atins pentru oricare dintre polinoamele $X^n - k$, $k = 1, \cdots, m$.

. . . . **1 punct**

Vom arăta că numărul de rădăcini distincte ale unui polinom care are forma din enunţ este cel puţin $n(m-1)+1$.

Pentru orice $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$, şi orice $z \in \mathbb{C}$, fie $\mathrm{ord}_z f = \mathrm{ord}_{X-z} f$ cea mai mare putere a lui $X - z$ care îl divide pe f. Mulţimea $Z(f) = \{z : z \in \mathbb{C}, \mathrm{ord}_z f \neq 0\}$ este exact mulţimea rădăcinilor distincte ale lui f, şi

$$\sum_{z\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_z f = \sum_{z\in Z(f)} \mathrm{ord}_z f = \deg f.$$

Prin urmare,

$$|Z(f)| + \sum_{z\in Z(f)} (\mathrm{ord}_z f - 1) = \deg f.$$

Dar

$$\sum_{z\in Z(f)} (\mathrm{ord}_z f - 1) = \sum_{z\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_z (f, f'),$$

unde f' este derivata lui f şi (f, f') este cel mai mare divizor comun al lui f şi f'. Deci

$$|Z(f)| + \sum_{z\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_z (f, f') = \deg f. \tag{$*$}$$

. . . . **2 puncte**

Fie $f \in \mathbb{C}[X]$, $f \neq 0$, şi $g = \prod_{k=1}^{m}(f + a_k)$, unde m este un număr natural nenul, iar a_k sunt numere complexe distincte două câte două. Pentru g relaţia $(*)$ devine:

$$|Z(g)| + \sum_{z\in\mathbb{C}} \mathrm{ord}_z (g, g') = \deg g = m \deg f.$$

Deoarece $g' = f' \sum_{k=1}^{m} \prod_{j \neq k} (f + a_j)$, iar polinoamele $f + a_k$ sunt coprime două câte două, dacă $\deg f \geq 1$, atunci (g, g') divide f', deci

$$\sum_{z \in \mathbb{C}} \operatorname{ord}_z(g, g') \leq \sum_{z \in \mathbb{C}} \operatorname{ord}_z f' = \deg f' = \deg f - 1.$$

Prin urmare, $|Z(g)| \geq (m-1) \deg f + 1$.

.... **4 puncte**

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a IX-a

Problema 1. Înălţimea $[BH]$ dusă pe ipotenuza triunghiului ABC intersectează bisectoarele $[AD]$ şi $[CE]$ în punctele Q, respectiv P. Demonstraţi că dreapta care trece prin mijloacele segmentelor $[QD]$ şi $[PE]$ este paralelă cu dreapta AC.

Problema 2. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea: pentru orice interval deschis şi mărginit I, mulţimea $f(I)$ este un interval deschis, de aceeaşi lungime cu I.

Problema 3. Demonstraţi că, dacă $n \geq 2$ este un număr natural şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere reale pozitive, atunci

$$\begin{aligned} 4\left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}^3 - x_n^3}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n^3 - x_1^3}{x_n + x_1}\right) \leq \\ \leq (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2. \end{aligned}$$

Problema 4. Pe o masă sunt $k \geq 2$ grămezi având $n_1, n_2, \ldots,$ respectiv n_k creioane. O *mutare* constă în alegerea a două grămezi având a, respectiv b creioane, $a \geq b$ şi transferarea din prima grămadă în cea de-a doua a b creioane.

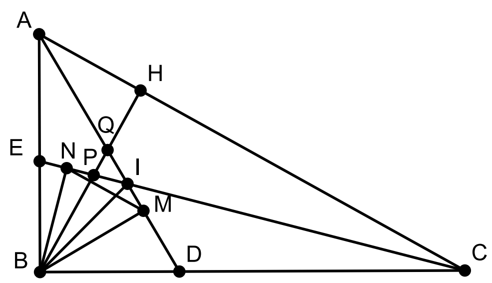
Determinaţi condiţia necesară şi suficientă pentru $n_1, n_2, \ldots, n_k$, astfel încât să existe o succesiune de mutări prin care toate creioanele sunt transferate în aceeaşi grămadă.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

CLASA a IX-A

SOLUŢII ŞI BAREMURI DE CORECTARE

1. Înălţimea BH dusă pe ipotenuza triunghiului ABC intersectează bisectoarele AD şi CE în punctele Q, respectiv P. Demonstraţi că dreapta care trece prin mijloacele segmentelor $[QD]$ şi $[PE]$ este paralelă cu dreapta AC.



Soluţie. Dacă a, b, c sunt laturile, atunci

$$\frac{HA}{HC} = \frac{c^2}{a^2}, \quad \frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}, \quad \frac{QA}{QD} = \frac{c^2}{a^2}\frac{b+c}{c} = \frac{c}{b-c}, \qquad \textbf{(3 p)}$$

$$\overrightarrow{BQ} = \frac{b-c}{b}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{b}\overrightarrow{BD}, \qquad \textbf{(1 p)}$$

$$\overrightarrow{BM} = \frac{b-c}{2b}\overrightarrow{BA} + \frac{c+b}{2b}\overrightarrow{BD} = \frac{b-c}{2b}\overrightarrow{BA} + \frac{c}{2b}\overrightarrow{BC} \qquad \textbf{(1 p)}$$

şi, analog, $\overrightarrow{BN} = \frac{b-a}{2b}\overrightarrow{BC} + \frac{a}{2b}\overrightarrow{BA}$, de unde

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2b}\Big((b-a-c)\overrightarrow{BC} + (a-c-b)\overrightarrow{BA}\Big) = \frac{a+c-b}{2b}\overrightarrow{CA},$$

ceea ce dovedeşte concluzia. **(2 p)**

2. Determinaţi toate funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea: pentru orice interval deschis şi mărginit I, mulţimea $f(I)$ este un interval deschis, de aceeaşi lungime cu I.

Soluţie. Arătăm că funcţiile care convin sunt cele de forma $f(x) = x + c$, precum şi cele de forma $f(x) = -x + c$, $c \in \mathbb{R}$ (este evident că acestea verifică cerinţa). **(1 p)**

Pentru aceasta arătăm că

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|, \forall x, y \in \mathbb{R}. \qquad (1)$$

Într-adevăr, dacă $a < b$ şi $d = b-a$, atunci imaginea intervalului $I = (a-d, b+d)$ este un interval deschis J de lungime $3d$, iar imaginile intervalelor $(a-d, a)$, (a, b), $(b, b+d)$ sunt trei intervale deschise J_1, J_2, J_3 astfel încât fiecare are lungimea d şi $J = J_1 \cup J_2 \cup J_3 \cup \{f(a)\} \cup \{f(b)\}$. Aceasta nu este posibil decât dacă J_1, J_2, J_3 sunt disjuncte iar $f(a)$ şi $f(b)$ sunt punctele care împart J în trei părţi egale, deci $|f(a) - f(b)| = d$. **(4 p)**

Din (1) deducem $|f(x) - f(0)| = |x|$, deci $f(x) = c \pm x$, unde $c = f(0)$. Apoi, din $|f(x) - f(1)| = |x - 1|$, în cazul $f(1) = c + 1$ rezultă $f(c) = c + x$ pentru orice x, iar în cazul $f(1) = c - 1$ rezultă $f(c) = c - x$ pentru orice x. **(2 p)**

3. Demonstraţi că, dacă $n \geq 2$ este un număr natural şi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt numere reale pozitive, atunci

$$4\left(\frac{x_1^3 - x_2^3}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^3 - x_3^3}{x_2 + x_3} + \ldots + \frac{x_{n-1}^3 - x_n^3}{x_{n-1} + x_n} + \frac{x_n^3 - x_1^3}{x_n + x_1}\right) \leq$$
$$\leq (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + \ldots + (x_{n-1} - x_n)^2 + (x_n - x_1)^2.$$

Soluţie. Dacă notăm $x_{n+1} = x_1$, atunci

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^3 - x_{i+1}^3}{x_i + x_{i+1}} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^2 - x_{i+1}^2 + \frac{x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{x_i + x_{i+1}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{x_i + x_{i+1}}.$$

(3 p)

Pe de altă parte, $\dfrac{x_i x_{i+1}(x_{i+1} - x_i)}{x_i + x_{i+1}} \leq \dfrac{1}{2} x_{i+1}\left(x_{i+1} - x_i\right)$; prin adunarea acestor inegalităţi pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ obţinem concluzia. **(4 p)**

4. Pe o masă sunt $k \geq 2$ grămezi având $n_1, n_2, \ldots,$ respectiv n_k creioane. O *mutare* constă în alegerea a două grămezi având a, respectiv b creioane, $a \geq b$ şi transferarea din prima grămadă în cea de-a doua a b creioane.

Determinaţi condiţia necesară şi suficientă pentru $n_1, n_2, \ldots, n_k$, astfel încât să existe o succesiune de mutări prin care toate creioanele sunt transferate în aceeaşi grămadă.

Soluţie. Condiţia este $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)/d = 2^m, m \in \mathbb{N}^*$, unde d este cel mai mare divizor comun al numerelor $n_1, n_2, \ldots, n_k$. **(1 p)**

Într-adevăr, dacă a, b sunt numere naturale, atunci $(a - b, 2b) = (a, b)$ sau $(a - b, 2b) = 2(a, b)$ deci, după orice mutare, cel mai mare divizor comun al numerelor creioanelor din grămezile rămase se păstrează sau se înmulţeşte cu 2. În final rămâne o grămadă cu $n_1 + \ldots + n_k = 2^m d, m \in \mathbb{N}^*$ creioane. **(3 p)**

Reciproc, dacă $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 2^m d, m \in \mathbb{N}^*$, atunci demonstrăm prin inducţie după m că există o succesiune de mutări prin care toate creioanele se pot transfera în aceeaşi grămadă.

În cazul $m = 1$ avem două grămezi cu $n_1 = n_2$ creioane, deci după o mutare obţinem o singură grămadă.

Presupunem apoi că afirmaţia este adevărată pentru $m \leq p$ şi orice d. În situaţia $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = 2^{p+1}d$, cardinalul mulţimii

$$A = \{i \mid 1 \leq i \leq k, n_i/d \text{ este impar}\}$$

este număr par, deci putem grupa două câte două grămezile cu $n_i, i \in A$ elemente şi, efectuând câte o mutare în fiecare grupă, obţinem grămezi cu $n'_1, \ldots, n'_l$ creioane, cu $n'_1 + \ldots + n'_l = 2^q(n'_1, \ldots, n'_l)$, $q \leq p$. Conform ipotezei de inducţie, de aici avem o succesiune de mutări care deplasează toate creioanele în aceeaşi grămadă. **(3 p)**