Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Bistriţa, 4 aprilie 2012

CLASA a V-a

Problema 1. Trei piraţi, Jack, Tom şi Bill, jefuiesc o corabie unde găsesc mai mulţi săculeţi care conţin, împreună, 2012 monede. Jack ia primul săculeţ şi împarte conţinutul acestuia dând fiecăruia, pe rând, câte o monedă, în ordinea Jack, Tom, Bill, Jack, Tom, Bill, ..., până când săculeţul se goleşte. Jack împarte apoi monedele din al doilea săculeţ, începând tot cu sine şi respectând aceeaşi ordine. Procedează la fel cu ceilalţi săculeţi, împărţind monedele după aceeaşi regulă. La sfârşit, Bill constată că are cu trei monede mai puţin decât Jack. Aflaţi câte monede a primit fiecare pirat.

Problema 2. Fiecare element al mulţimii $\{2, 3, 4, ..., 50\}$ se colorează cu câte o culoare, respectând regula: dacă un număr are o anumită culoare, atunci orice divizor al său are aceeaşi culoare. Care este numărul maxim de culori care pot fi utilizate?

Problema 3. Doi prieteni, Cristi şi Marius, joacă următorul joc: Cristi alege un număr din mulţimea $\{0, 1, 2, 3, ..., 999\}$, pe care îl înmulţeşte cu 2, iar Marius adună 22 la rezultat; apoi, Cristi înmulţeşte noul număr cu 2, iar Marius adună 22 la noul rezultat şi aşa mai departe. Pierde cel care obţine primul un număr mai mare sau egal cu 1000. Determinaţi câte posibilităţi de a alege numărul iniţial are Cristi astfel încât să câştige el jocul.

Problema 4. Numim *olimpic* un număr natural care poate fi scris ca sumă de două numere naturale distincte cu aceeaşi sumă a cifrelor.

Demonstraţi că mulţimea $M = \{10^n - 1 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ conţine o infinitate de numere *olimpice* şi o infinitate de numere care nu sunt *olimpice.*

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru clarificări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Bistriţa, 4 aprilie 2012

CLASA a V-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Trei piraţi, Jack, Tom şi Bill, jefuiesc o corabie unde găsesc mai mulţi săculeţi care conţin, împreună, 2012 monede. Jack ia primul săculeţ şi împarte conţinutul acestuia dând fiecăruia, pe rând, câte o monedă, în ordinea Jack, Tom, Bill, Jack, Tom, Bill, ..., până când săculeţul se goleşte. Jack împarte apoi monedele din al doilea săculeţ, începând tot cu sine şi respectând aceeaşi ordine. Procedează la fel cu ceilalţi săculeţi, împărţind monedele după aceeaşi regulă. La sfârşit, Bill constată că are cu trei monede mai puţin decât Jack. Aflaţi câte monede a primit fiecare pirat.

Soluţie

Dacă Bill are n monede şi Jack are $n+3$ monede, atunci Tom poate avea $n, n+1, n+2$ sau $n+3$ monede. .... **2 puncte**

Numărul total al monedelor poate fi $3n+3, 3n+4, 3n+5$ sau $3n+6$. Cum $2012 = M_3 + 2$, singura variantă care convine este $3n+5$ .. **3 puncte**

Obţinem că $n = 669$, prin urmare Jack, Tom şi Bill au 672, 671 respectiv 669 monede .... **2 puncte**

Problema 2. Fiecare element al mulţimii $\{2, 3, 4, ..., 50\}$ se colorează cu câte o culoare, respectând regula: dacă un număr are o anumită culoare, atunci orice divizor al său are aceeaşi culoare. Care este numărul maxim de culori care pot fi utilizate?

Soluţie

Cum 2 divide orice număr par, rezultă că toate numerele pare au o aceeaşi culoare, să spunem roşu .... **2 puncte**

Toate numerele impare al căror dublu este în mulţime (anume 3, 5, ..., 25) trebuie să fie tot roşii .... **1 punct**

Numerele 27, 33, 35, 39, 45, 49 au fiecare câte un divizor roşu, prin urmare vor fi şi ele roşii .... **2 puncte**

Numerele prime mai mari decât 25 (anume 29, 31, 37, 41, 43, 47) pot avea câte o altă culoare. .... **1 punct**

Numărul maxim de culori care pot fi utilizate este $1 + 6 = 7$. **1 punct**

Problema 3. Doi prieteni, Cristi şi Marius, joacă următorul joc: Cristi alege un număr din mulţimea $\{0, 1, 2, 3, ..., 999\}$, pe care îl înmulţeşte cu 2, iar Marius adună 22 la rezultat; apoi, Cristi înmulţeşte noul număr cu 2, iar Marius adună 22 la noul rezultat şi aşa mai departe. Pierde cel care obţine primul un număr mai mare sau egal cu 1000. Determinaţi câte posibilităţi de a alege numărul iniţial are Cristi astfel încât să câştige el jocul.

Soluţia 1. Cristi câştigă dacă ajunge la un număr mai mare sau egal cu 978 şi mai mic decât 1000. Evident, acesta va fi un număr par ... **1 punct**

Deoarece Cristi înmulţeşte cu 2 şi Marius adună 22 la fiecare pas, numerele obţinute în timpul jocului sunt pare. Numerele 978, 982, 986, 990, 994 şi 998 se obţin prin dublarea numerelor impare 489, 491, 493, 495, 497, 499, numere care nu pot fi obţinute în timpul jocului. Aceste numere pot fi însă alese iniţial de Cristi şi îi asigură câştigarea jocului. .... **1 punct**

În continuare, C înseamnă rezultat obţinut de Cristi, A înseamnă număr care, dacă este ales de Cristi, îi asigură acestuia câştigarea jocului, iar M înseamnă rezultat obţinut de Marius. Numerele 980,984,988,992 şi 996 se pot obţine prin următoarele succesiuni de paşi:

$980(C) \leftarrow 490(A,M) \leftarrow 468(C) \leftarrow 234(A,M) \leftarrow 212(C) \leftarrow 106(A,M) \leftarrow 84(C) \leftarrow 42(A,M) \leftarrow 20(C) \leftarrow 10(A)$

$984(C) \leftarrow 492(A,M) \leftarrow 470(C) \leftarrow 235(A)$

$988(C) \leftarrow 494(A,M) \leftarrow 472(C) \leftarrow 236(A,M) \leftarrow 214(C) \leftarrow 107(A)$

$992(C) \leftarrow 496(A,M) \leftarrow 474(C) \leftarrow 237(A)$

$996(C) \leftarrow 498(A,M) \leftarrow 476(C) \leftarrow 238(A,M) \leftarrow 216(C) \leftarrow 108(A,M) \leftarrow 86(C) \leftarrow 43(A)$

.... **4 puncte**

Deci, Cristi are 22 de posibilităţi de a alege numărul iniţial astfel încât să câştige jocul. .... **1 punct**

Soluţia 2. Dacă Cristi alege numărul a, până la finalul jocului vor fi maxim cinci etape:

$$\underbrace{a \to 2a \to 2a+22}_{I} \to \underbrace{4a+44 \to 4a+66}_{II} \underbrace{\to 8a+132 \to 8a+154}_{III} \to$$
$$\underbrace{\to 16a+308 \to 16a+330}_{IV} \underbrace{\to 32a+660 \to 32a+682}_{V} \to 64a+1364 > 1000.$$

.... **1 punct**

Cristi câştigă în etapa I dacă $2a < 1000$ şi $2a+22 \geq 1000$, adică $a < 500$ şi $a \geq 489$. Rezultă că $a \in \{489, \cdots, 499\}$, deci 11 posibilităţi. ... **1 punct**

Cristi câştigă în etapa II dacă $4a+44 < 1000$ şi $4a+66 \geq 1000$, adică $a < 239$ şi $a \geq \frac{467}{2}$. Rezultă că $a \in \{234, \cdots, 238\}$, deci 5 posibilităţi.

.... **1 punct**

Cristi câştigă în etapa III dacă $8a+132 < 1000$ şi $8a+154 \geq 1000$, adică $a < \frac{217}{2}$ şi $a \geq \frac{423}{4}$. Rezultă că $a \in \{106, 107, 108\}$, deci 3 posibilităţi.

.... **1 punct**

Cristi câştigă în etapa IV dacă $16a+308 < 1000$ şi $16a+330 \geq 1000$, adică $a < \frac{173}{4}$ şi $a \geq \frac{335}{8}$. Rezultă că $a \in \{42, 43\}$, deci 2 posibilităţi.

.... **1 punct**

Cristi câştigă în etapa V dacă $32a+660 < 1000$ şi $32a+682 \geq 1000$, adică $a < \frac{85}{8}$ şi $a \geq \frac{159}{16}$. Rezultă că $a = 10$, deci o singură posibilitate.

. . . . **1 punct**

În concluzie, Cristi are $11+5+3+2+1=22$ posibilităţi de a alege numărul iniţial astfel încât să câştige jocul.

. . . . **1 punct**

Problema 4. Numim *olimpic* un număr natural care poate fi scris ca sumă de două numere naturale distincte cu aceeaşi sumă a cifrelor.

Demonstraţi că mulţimea $M=\{10^n-1 \mid n\in\mathbb{N}^*\}$ conţine o infinitate de numere *olimpice* şi o infinitate de numere care nu sunt *olimpice.*

Soluţie

Notăm cu $s(a)$ suma cifrelor din scrierea zecimală a numărului natural a.

Dacă n este par, $n=2k$, $k\in\mathbb{N}^*$, atunci

$$10^n-1=\underbrace{99\ldots9}_{2k\text{ cifre}}=\underbrace{5454\ldots54}_{2k\text{ cifre}}+\underbrace{4545\ldots45}_{2k\text{ cifre}}.$$

Cum $s(\underbrace{5454\ldots54}_{2k\text{ cifre}})=s(\underbrace{4545\ldots45}_{2k\text{ cifre}})=9k$, rezultă că 10^n-1, cu $n\in\mathbb{N}^*$, n par, este număr olimpic. . . . . **3 puncte**

Dacă $a+b=99\ldots9$, atunci în adunarea $a+b$ nu există treceri peste ordin, deci $s(a+b)=s(a)+s(b)$. . . . . **2 puncte**

Fie $n\in\mathbb{N}^*$ impar. Dacă, prin absurd, $\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ cifre}}=a+b$, cu $s(a)=s(b)$, ar rezulta că $9n=s(\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ cifre}})=s(a+b)=s(a)+s(b)=2s(a)$, adică un număr impar este egal cu unul par, contradicţie. Ca urmare, numerele de forma 10^n-1, cu $n\in\mathbb{N}^*$, n impar, nu sunt olimpice. . . . . **2 puncte**

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru clarificări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

2010
Anul Matematicii în Şcoala Românească
100
www.anulmatematicii.ro

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Bistriţa, 4 aprilie 2012

CLASA a VI-a

Problema 1. Determinaţi cifrele nenule a, b, c pentru care

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\overline{a,b\,(c)}.$$

Problema 2. Se consideră numărul natural $n \geq 2012$. Pentru orice număr natural nenul $p \leq 2011$, notăm cu A_p mulţimea triunghiurilor care au o latură de lungime egală cu câtul împărţirii lui n la 2012, o latură de lungime egală cu câtul împărţirii lui n la p, iar lungimea celei de-a treia laturi este număr natural (se consideră că împărţirile se efectuează cu rest).

a) Arătaţi că, dacă $n < 4024$, atunci pentru orice alegere a lui p, toate elementele din mulţimea A_p sunt triunghiuri isoscele.

b) Determinaţi valorile numărului natural n pentru care mulţimea A_{1006} are 5 elemente.

Problema 3. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi X un punct pe semidreapta $(CA$ astfel încât $A \in (CX)$. Pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAX}$ se consideră punctul D, iar pe semidreapta $(AB$ se consideră punctul E astfel încât $AE + EC = DA + AC$. Demonstraţi că semidreapta $(CD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACE}$.

Problema 4. Se consideră un număr natural de şapte cifre, în scrierea zecimală a căruia se folosesc cel mult trei cifre distincte nenule. Arătaţi că se pot şterge trei cifre astfel încât numărul de patru cifre rămas şi răsturnatul său au un divizor comun mai mare sau egal cu 2.

Timp de lucru 2 ore. Se acordă în plus 30 de minute pentru clarificări.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Bistriţa, 4 aprilie 2012

CLASA a VI-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1.
Determinaţi cifrele nenule a, b, c pentru care

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\overline{a,b\,(c)}.$$

Soluţie. Dacă $a \geq 3$, atunci $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<3<\overline{a,b\,(c)}$, contradicţie. .... **1 punct**

Pentru $a=2$, dacă unul dintre numerele b sau c este cel puţin egal cu 3, atunci $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} \leq \dfrac{1}{2}+1+\dfrac{1}{3}<2<\overline{a,b\,(c)}$, contradicţie, iar dacă $b, c \in \{1,2\}$ nu se obţin soluţii (verificare directă). .... **1 punct**

În cazul $a=1$, obţinem $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\overline{0,b\,(c)}$, de unde $90\,(b+c)=bc\,(9b+c)$ (1)
.... **1 punct**

De aici rezultă că $9 \mid bc\,(9b+c)$.

Dacă 3 nu divide c, atunci $9 \mid b$, deci $b=9$ şi relaţia (1) devine $10\,(9+c)=c\,(81+c)$, care nu are soluţii. .... **2 puncte**

Dacă $3 \mid c$, rezultă $c \in \{3,6,9\}$.

Pentru $c=3$ se obţine soluţia $b=5$, iar pentru $c=6$ şi $c=9$ nu se obţin soluţii.
.... **2 puncte**

Problema 2. Se consideră numărul natural $n \geq 2012$. Pentru orice număr natural nenul $p \leq 2011$, notăm cu A_p mulţimea triunghiurilor care au o latură de lungime egală cu câtul împărţirii lui n la 2012, o latură de lungime egală cu câtul împărţirii lui n la p, iar lungimea celei de-a treia laturi este număr natural (se consideră că împărţirile se efectuează cu rest).

a) Arătaţi că, dacă $n<4024$, atunci mulţimea A_p conţine doar triunghiuri isoscele, pentru orice alegere a lui p.

b) Determinaţi valorile numărului natural n pentru care mulţimea A_{1006} are 5 elemente.

Soluţie.

a) Cum $2012 \leq n<4024$, câtul împărţirii lui n la 2012 este egal cu 1. ..... **1 punct**

Dacă $u, v \in \mathbb{N}^*$ sunt lungimile celorlalte două laturi ale triunghiului, $u \geq v$, atunci $u-v<1$, deci $u=v$. .... **2 puncte**

b) Fie a şi b câtul împărţirii lui n la 2012, respectiv la 1006, şi c lungimea celei de-a treia laturi a triunghiului; atunci $a<b$. Numărul de elemente al mulţimii A_p este egal cu numărul de moduri în care se poate alege numărul natural c astfel încât a, b, c să poată fi lungimile laturilor unui triunghi.

Din inegalitatea triunghiului, rezultă că $b+a>c>b-a$, deci $\operatorname{card} A_{1006}=(b+a)-(b-a)-1=2a-1$, de unde $a=3$. .... **3 puncte**

Rezultă că n dă câtul 3 la împărţirea cu 2012, deci n are forma $2012 \cdot 3 + r$, unde $r \in \mathbb{N}^*$, $0 \le r \le 2011$. Se obţine $n \in \{6036, 6037, ..., 8047\}$ . . . . **1 punct**

Problema 3. Se consideră triunghiul echilateral ABC şi X un punct pe semidreapta $(CA$ astfel încât $A \in (CX)$. Pe bisectoarea unghiului $\widehat{BAX}$ se consideră punctul D, iar pe semidreapta $(AB$ se consideră punctul E astfel încât $AE + EC = DA + AC$. Demonstraţi că semidreapta $(CD$ este bisectoarea unghiului $\widehat{ACE}$.

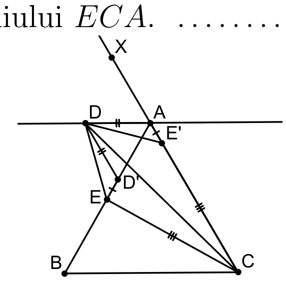
Soluţie. Fie $D' \in AB$ şi $E' \in AC$ astfel încât $AD' = AD$ şi $CE' = CE$.

Deoarece $m(\sphericalangle DAD') = 60°$ şi $AD' = AD$, deducem că triunghiul ADD' este echilateral, deci $AD = DD'$. . . . . **3 puncte**

$AE + EC = AD + AC \Rightarrow AE + E'C = AD' + AC \Rightarrow AE - AD' = AC - E'C \Rightarrow D'E = AE'$. . . . . **1 punct**

Triunghiurile DAE' şi $DD'E$ sunt congruente (LUL). Deci $DE = DE'$. . . . **1 punct**

Triunghiurile DEC şi $DE'C$ sunt congruente (LLL), deci $\sphericalangle(DCE) \equiv \sphericalangle(DCE')$, rezultă CD este bisectoarea unghiului ECA. . . . . **2 puncte**



Problema 4.

Se consideră un număr natural de şapte cifre, în scrierea zecimală a căruia se folosesc cel mult trei cifre distincte nenule. Arătaţi că se pot şterge trei cifre astfel încât numărul de patru cifre rămas şi răsturnatul său au un divizor comun mai mare sau egal cu 2.

Soluţie. Fie a, b, c cele trei cifre distincte şi n_a , n_b şi n_c numărul de apariţii ale cifrelor a, b, respectiv c, în numărul de 7 cifre considerat; atunci $n_a + n_b + n_c = 7$.

Renotând eventual, putem presupune că $n_a \ge n_b \ge n_c \ge 0$. Cu principiul cutiei, rezultă $n_a \ge 3$. . . . . **1 punct**

Dacă $n_a \ge 4$, putem şterge trei cifre astfel încât să obţinem numărul $\overline{aaaa}$, care este egal cu răsturnatul său. . . . . **1 punct**

Dacă $n_a = 3$, atunci $n_b = 3$ şi $n_c = 1$ sau $n_b = n_c = 2$.

Pentru $n_a = 3$, $n_b = 3$, $n_c = 1$, ştergând o cifră a, o cifră b şi cifra c, numărul rămas are una din formele $\overline{aabb}$, $\overline{abab}$,$\overline{abba}$ sau răsturnatele acestora. . . . . **2 puncte**

Pentru $n_a = 3$, $n_b = 2$, $n_c = 2$, ştergând o cifră a şi cele două cifre c, numărul rămas are una din formele $\overline{aabb}$, $\overline{abab}$, $\overline{abba}$ sau răsturnatele acestora. . . . . **2 puncte**

Numărul $\overline{aabb}$ şi răsturnatul său au divizorul comun 11, numărul $\overline{abab}$ şi răsturnatul său au divizorul comun 101, iar $\overline{abba}$ este identic cu răsturnatul său. . . . . **1 punct**

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a VII-a

Problema 1. Fie P un punct în interiorul pătratului $ABCD$ astfel încât $PA = 1$, $PB = \sqrt{2}$ şi $PC = \sqrt{3}$.

a) Determinaţi lungimea segmentului $[PD]$.

b) Determinaţi măsura unghiului $\sphericalangle APB$.

Problema 2. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Se consideră punctele $D \in (AC)$ şi $E \in (BD)$ astfel încât $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ECD \equiv \sphericalangle CED$. Arătaţi că $BE = 2 \cdot AD$.

Problema 3. Se consideră numerele naturale nenule (m, n) astfel încât numerele
$$\frac{m^2 + 2n}{n^2 - 2m} \text{ şi } \frac{n^2 + 2m}{m^2 - 2n}$$
sâ fie întregi.

a) Arătaţi că $|m - n| \leq 2$.

b) Găsiţi toate perechile (m, n) cu proprietatea din ipoteză.

Problema 4. Numim *redus* al unui număr natural A cu n cifre $(n \geq 2)$ un număr de $n - 1$ cifre obţinut prin ştergerea uneia din cifrele lui A. De exemplu, reduşii lui 1024 sunt 124, 104 şi 120.

Determinaţi câte numere de şapte cifre **nu** se pot scrie ca suma dintre un număr natural A şi un *redus* al lui A.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a VII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1.

Soluţia 1. a) Fie M şi N proiecţiile lui P pe AB, respectiv CD. Atunci $PB^2-PA^2 = MB^2-MA^2 = NC^2-ND^2 = PC^2-PD^2$, de unde $PD = \sqrt{2}$ ....**2 puncte**

b) Cum $\Delta PAB \equiv \Delta PAD$ (LLL), rezultă că $m(\sphericalangle PAB) = 45°$. ....**2 puncte**

Din teorema lui Pitagora, $PM = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}PB$, de unde $m(\sphericalangle PBM) = 30°$ ....**2 puncte**

$m(\sphericalangle APB) = m(\sphericalangle APM) + m(\sphericalangle MPB) = 45° + 60° = 105°$ ...**1 punct**

Soluţia 2. a) Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, segmentul $[PO]$ este mediană în triunghiurile (eventual degenerate) PAC şi PBD, de unde $PA^2 + PC^2 = PB^2 + PD^2$. Rezultă că $PD = \sqrt{2}$ ....**2 puncte**

b) Fie Q astfel încât $PB = BQ$, $m(\sphericalangle PBQ) = 90°$, P şi Q de o parte şi de alta a lui BC. Atunci $\Delta ABP \equiv \Delta CBQ$ (LUL) ....**2 puncte**

Din teorema lui Pitagora în ΔPBQ, $PQ = 2$, iar din reciproca teoremei lui Pitagora în ΔPCQ rezultă $m(\sphericalangle PCQ) = 90°$ ....**1 punct**

Cum $CQ = \frac{1}{2}PQ$, rezultă $m(\sphericalangle CPQ) = 30°$ ....**1 punct**

$m(\sphericalangle APB) = m(\sphericalangle CQB) = m(\sphericalangle CQP) + m(\sphericalangle PQB) = 60° + 45° = 105°$ ....**1 punct**

Problema 2. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Se consideră punctele $D \in (AC)$ şi $E \in (BD)$ astfel încât $\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle ECD \equiv \sphericalangle CED$. Arătaţi că $BE = 2 \cdot AD$.

Soluţie Construim D' simetricul lui D faţă de A. .... **1 punct**

Notând $m(\sphericalangle ABC) = m(\sphericalangle ECD) = m(\sphericalangle CED) = x$, rezultă că $m(\sphericalangle ADB) = 2x$ şi $m(\sphericalangle ABD') = m(\sphericalangle ABD) = 90° - 2x$, de unde rezultă că $m(\sphericalangle CBD') = x + 90° - 2x = 90° - x$. ....**2 puncte**

În triunghiul BCD', deoarece $m(\sphericalangle BD'C) = 2x$, rezultă că $m(\sphericalangle BCD') = 90° - x = m(\sphericalangle CBD')$, deci triunghiul $D'BC$ este isoscel şi $D'C = D'B = DB$. ....**2 puncte**

Dar $DC = DE$, de unde $BE = BD - DE = CD' - CD = DD' = 2 \cdot AD$. ....**2 puncte**

Problema 3. Se consideră numerele naturale nenule (m, n) astfel încât numerele

$$\frac{m^2 + 2n}{n^2 - 2m} \quad \text{şi} \quad \frac{n^2 + 2m}{m^2 - 2n}$$

sâ fie întregi.

a) Arătaţi că $|m-n| \leq 2$.

b) Găsiţi toate perechile (m,n) cu proprietatea din ipoteză.

Soluţie

a) Cum $(m^2-2n) \mid (n^2+2m)$ şi $n^2+2m > 0$, rezultă $m^2-2n \leq n^2+2m$, adică $(m-1)^2 \leq (n+1)^2$, sau $m \leq n+2$. Analog $n \leq m+2$.. În consecinţă $|m-n| \leq 2$...**2 puncte**

b) Presupunem $n \geq m$. Atunci $n \in \{m, m+1, m+2\}$.

Dacă $n = m$, trebuie ca $\frac{n+2}{n-2} = 1 + \frac{4}{n-2} \in \mathbb{Z}$, de unde $n \in \{1,3,4,6\}$. Obţinem perechile $(n,m) \in \{(1,1),(3,3),(4,4),(6,6)\}$ ....**1 punct**

Dacă $n = m+1$, atunci $\frac{m^2+2n}{n^2-2m} = 1 + \frac{2m+1}{m^2+1}$.

Pentru $m \geq 3$ avem $0 < \frac{2m+1}{m^2+1} < 1$, deci $\frac{2m+1}{m^2+1} \notin \mathbb{Z}$.

Pentru $m = 1$, $\frac{2m+1}{m^2+1} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, iar pentru $m = 2$ $(n = 3)$ avem $\frac{n^2+2m}{m^2-2n} = \frac{13}{-2} \notin \mathbb{Z}$. Aşadar în cazul $n = m+1$ nu avem soluţii. ....**1 punct**

Dacă $n = m+2$, avem $\frac{m^2+2n}{n^2-2m} = 1 \in \mathbb{Z}$. Trebuie ca $\frac{n^2+2m}{m^2-2n} = 1 + \frac{8m+8}{m^2-2m-4} \in \mathbb{Z}$.

Dacă $m \geq 12$, atunci $m^2-2m-4 > 8m+8$. Într-adevăr, $m^2-10m-12 = m(m-10)-12 \geq 12\cdot 2-12 > 0$. Rezultă că pentru $m \geq 12$ avem $\frac{n^2+2m}{m^2-2n} \notin \mathbb{Z}$. Pentru $m \in \{1,2,\ldots,11\}$ se verifică perechile obţinute şi se constată că $\frac{n^2+2m}{m^2-2n} \in \mathbb{Z}$ pentru $(m,n) \in \{(2,4),(3,5),(4,6)\}$

În concluzie, având în vedere simetria fracţiilor,

$(m,n) \in \{(1,1),(3,3),(4,4),(6,6),(2,4),(4,2),(3,5),(5,3),(4,6),(6,4)\}$.

....**3 puncte**

Problema 4. Numim *redus* al unui număr natural A cu n cifre $(n \geq 2)$ un număr de $n-1$ cifre obţinut prin ştergerea uneia din cifrele lui A. De exemplu, reduşii lui 1024 sunt 124, 104 şi 120.

Determinaţi câte numere de şapte cifre **nu** se pot scrie ca suma dintre un număr natural A şi un *redus* al lui A.

Soluţie.

Să numim *convenabil*, respectiv *neconvenabil*, un număr care se poate, respectiv nu se poate scrie ca suma dintre un număr şi un redus al său.

Suma dintre numărul $A = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ şi redusul său $B = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$ este numărul $11B + a_7$, adică un număr de cel puţin 7 cifre, mai mare decât $11 \cdot 10^5$, care nu dă restul 10 la împărţirea cu 11.

Alegând în mod potrivit numărul B şi cifra a_7, rezultă că orice număr de 7 cifre, mai mare decât $11 \cdot 10^5$, care dă restul diferit de 10 la împărţirea cu 11, este convenabil. ....**1 punct**

Suma dintre numărul $C = \overline{c_1c_2c_3c_4c_5c_6}$ şi redusul său $D = \overline{c_1c_2c_3c_4c_5}$ este numărul $11D + c_6$, adică un număr de cel mult 7 cifre, mai mic decât $11 \cdot 10^5$, care nu dă restul 10 la împărţirea cu 11.

Ca urmare, alegând în mod potrivit numărul D şi cifra c_6, rezultă că orice număr de 7 cifre, mai mic decât $11 \cdot 10^5$, care dă restul diferit de 10 la împărţirea cu 11, este convenabil. .... **1 punct**

Aşadar, numerele *neconvenabile* se află în mulţimea numerelor de 7 cifre care dau restul 10 la împărţirea cu 11. Întrucât suma oricărui număr natural cu orice redus al său, altul decât cel obţinut prin ştergerea ultimei cifre, este un număr par, rezultă că numerele de 7 cifre, de forma $22p + 21$, $p \in \mathbb{N}$, sunt *neconvenabile*. .... **2 puncte**

Rămâne să studiem situaţia numerelor de 7 cifre, de forma $22p + 10$, $p \in \mathbb{N}$. Vom arăta că aceste numere se pot scrie sub forma

$$\overline{a_1 a_2 ... a_{n-2} a_{n-1} a_n} + \overline{a_1 a_2 ... a_{n-2} a_n} = 110 \cdot \overline{a_1 a_2 ... a_{n-2}} + 10 \cdot a_{n-1} + 2a_n,$$

unde $n \in \{6, 7\}$.

Numerele de forma $22p + 10$, $p \in \mathbb{N}$, au, în funcţie de restul împărţirii lui p la 5, una din formele $110k + 10$, $110k + 32$, $110k + 54$, $110k + 76$, $110k + 98$, $k \in \mathbb{N}$.

Alegând $k = \overline{a_1 a_2 ... a_{n-2}}$ şi, de exemplu, $(a_{n-1}, a_n) \in \{(1,0), (3,1), (5,2), (7,3), (9,4)\}$, rezultă că numerele de forma $22p + 10$, $p \in \mathbb{N}$, sunt convenabile. .... **2 puncte**

Ca urmare, numerele *neconvenabile* de 7 cifre sunt cele de forma $22p + 21$, $p \in \mathbb{N}$. Din $10^6 \leq 22p + 21 \leq 10^7 - 1$, rezultă că $45\,454 \leq p \leq 454\,544$. Cum p ia $454\,544 - 45\,454 + 1 = 409\,091$ valori, rezultă că sunt $409\,091$ numere *neconvenabile* de 7 cifre. .... **1 punct**

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a VIII-a

Problema 1. Determinaţi numerele reale a, b, c, d astfel încât $ab+c+d=3$, $bc+d+a=5$, $cd+a+b=2$ şi $da+b+c=6$.

Problema 2. În planul xOy se consideră mulţimea de puncte

$$X=\{P(a,b)\mid(a,b)\in\{1,2,...,10\}\times\{1,2,...,10\}\}.$$

Determinaţi numărul de drepte diferite care se obţin unind câte două dintre punctele mulţimii X, astfel încât oricare două drepte nu sunt paralele.

Problema 3. Se consideră triunghiurile ascuţitunghice ACD şi BCD, situate în plane diferite. Fie G şi H centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului BCD, iar G' şi H' centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului ACD. Ştiind că dreapta HH' este perpendiculară pe planul (ACD), arătaţi că dreapta GG' este perpendiculară pe planul (BCD).

Problema 4.
Pentru orice mulţimi numerice nevide A şi B, notăm $A+B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}$.

a) Determinaţi cel mai mare număr natural nenul p cu proprietatea că există $A,B\subset\mathbb{N}$ astfel încât $\text{card}A=\text{card}B=p$ şi $A+B=\{0,1,2,...,2012\}$.

b) Determinaţi cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea că există $A,B\subset\mathbb{N}$ astfel încât $\text{card}A=\text{card}B=n$ şi $A+B=\{0,1,2,...,2012\}$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa finală, Constanţa, 3 aprilie 2012

CLASA a VIII-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Problema 1. Determinaţi numerele reale a, b, c, d astfel încât $ab+c+d=3$, $bc+d+a=5$, $cd+a+b=2$ şi $da+b+c=6$.

Soluţie. Notăm relaţiile date:

$ab+c+d=3$ (1) $\qquad bc+d+a=5$ (2)

$cd+a+b=2$ (3) $\qquad da+b+c=6$ (4)

Adunând relaţiile (1) şi (2) şi scăzând relaţiile (3) şi (4) obţinem $(b-d)(a+c-2)=0$.

Pentru $b=d$, din (1) şi (4) se obţine o contradicţie, deci $a+c=2$.
.... **3 puncte**

Adunând relaţiile (3) şi (4) se obţine $(d+1)(a+c)+2b=8$, de unde $b+d=3$. .... **2 puncte**

Adunând relaţiile (2) şi (3) se obţine $(c+1)(b+d)+2a=7$, de unde $3c+2a=4$.

Rezultă $a=2$, $b=0$, $c=0$ şi $d=3$. .... **2 puncte**

Problema 2. În planul xOy se consideră mulţimea de puncte

$$X=\{P(a,b) \mid (a,b)\in\{1,2,...,10\}\times\{1,2,...,10\}\}.$$

Determinaţi numărul de drepte diferite care se obţin unind câte două dintre punctele mulţimii X, astfel încât oricare două drepte nu sunt paralele.

Soluţie Fie $\mathcal{D}$, respectiv $\mathcal{D}'$, mulţimea dreptelor, oricare două neparalele, care formează cu semidreapta pozitivă Ox unghiuri ascuţite, respectiv obtuze. Dacă o dreaptă $d\in\mathcal{D}$ conţine punctele $P_1,P_2\in X$, atunci P_1P_2 este diagonală în dreptunghiul $P_1Q_1P_2Q_2$, unde $Q_1,Q_2\in X$, deci fiecărei drepte $d\in\mathcal{D}$ îi corespunde o dreaptă $d'\in\mathcal{D}'$ şi reciproc. .... **2 puncte**

Tangentele unghiurilor formate de dreptele $d\in\mathcal{D}$ cu Ox sunt numere distincte de forma $\frac{y}{x}$, unde $x,y\in\{1,2,...,9\}$, $(x,y)=1$. .... **2 puncte**

Pentru $x\in\{1,2,...,9\}$, sunt 9 fracţii ireductibile de forma $\frac{1}{x}$, 5 fracţii ireductibile de forma $\frac{2}{x}$, 6 de forma $\frac{3}{x}$, 5 de forma $\frac{4}{x}$, 8 de forma $\frac{5}{x}$, 3 de forma $\frac{6}{x}$, 8 de forma $\frac{7}{x}$, 5 de forma $\frac{8}{x}$ şi 6 fracţii ireductibile de forma $\frac{9}{x}$.
.... **2 puncte**

Ca urmare, mulţimile $\mathcal{D}$ şi $\mathcal{D}'$ au fiecare câte 55 de elemente, iar numărul dreptelor căutate este 112 (se adaugă o dreaptă paralelă cu Ox şi una paralelă cu Oy). .... **1 punct**

Problema 3. Se consideră triunghiurile ascuţitunghice ACD şi BCD, situate în plane diferite. Fie G şi H centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului BCD, iar G' şi H' centrul de greutate, respectiv ortocentrul triunghiului ACD. Ştiind că dreapta HH' este perpendiculară pe planul (ACD), arătaţi că dreapta GG' este perpendiculară pe planul (BCD).

Soluţie Relaţia $HH' \perp (ACD)$ implică $HH' \perp CD$ şi, cum $CD \perp BH$, obţinem $CD \perp (BHH')$. .... **1 punct**

Deoarece $AH' \perp CD$ rezultă $AH' \subset (BHH')$, deci $CD \perp AB$ (1) (punctele A, H, H', B sunt coplanare). .... **1 punct**

Din $AC \perp DH'$ şi $AC \perp HH'$ obţinem $AC \perp (DHH')$, prin urmare $DH \perp AC$. Cum $DH \perp BC$, rezultă $DH \perp (ABC)$, deci $AB \perp DH$. (2)

Din (1) şi (2) rezultă că $AB \perp (BCD)$. .... **4 puncte**

Dacă M este mijlocul lui $[CD]$, din $\dfrac{MG'}{MA} = \dfrac{MG}{MB} = \dfrac{1}{3}$, obţinem $GG' \parallel AB$.

Deoarece $AB \perp (BCD)$ şi $GG' \parallel AB$, rezultă $GG' \perp (BCD)$. . **1 punct**

Problema 4. Pentru orice mulţimi numerice nevide A şi B, notăm $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

a) Determinaţi cel mai mare număr natural nenul p cu proprietatea că există $A, B \subset \mathbb{N}$ astfel încât $\text{card}A = \text{card}B = p$ şi $A+B = \{0, 1, 2, ..., 2012\}$.

b) Determinaţi cel mai mic număr natural nenul n cu proprietatea că există $A, B \subset \mathbb{N}$ astfel încât $\text{card}A = \text{card}B = n$ şi $A+B = \{0, 1, 2, ..., 2012\}$.

Soluţie

a) Fie $A = \{a_1, a_2, \ ..., a_p\}$ şi $B = \{b_1, b_2, \ ..., b_p\}$, cu $a_1 < a_2 < ... < a_p$ şi $b_1 < b_2 < ... < b_p$.

Numerele $a_1+b_1 < a_2+b_1 < ... < a_p+b_1 < a_p+b_2 < a_p+b_3 < ... < a_p+b_p$ sunt elemente ale mulţimii $A + B$, deci $2p - 1 \leq 2013$, adică $p \leq 1007$.

.... **2 puncte**

Considerând mulţimile $A = B = \{0, 1, 2, ..., 1006\}$, rezultă că $p = 1007$.

.... **1 punct**

b) Fie $A = \{a_1, a_2, \ ..., a_n\}$ şi $B = \{b_1, b_2, \ ..., b_n\}$, cu $a_1 < a_2 < ... < a_n$ şi $b_1 < b_2 < ... < b_n$.

Întrucât numărul de perechi $(a, b) \in A \times B$ este n^2, rezultă că mulţimea $A + B$ conţine cel mult n^2 elemente. Întrucât $\text{card}\,(A + B) = 2013$, rezultă $n^2 \geq 2013$, de unde $n \geq 45$. .... **2 puncte**

Considerând mulţimile $A = \{0, 1, 2, ..., 44\}$ şi $B = \{0, 45, 2 \cdot 45, 3 \cdot 45, ..., 42 \cdot 45, 43 \cdot 45, 1968\}$, rezultă că $n = 45$. ... **2 puncte**