Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului

SIMULARE

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2012

Probă scrisă la MATEMATICĂ – Proba E. c)

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică - informatică.
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică- informatică.

- **Toate subiectele (I,II,III) sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p)

5p 1. Să se calculeze $\log_4\left(7-\sqrt{5}\right)+\log_4\left(7+\sqrt{5}\right)-\log_4 11$.

5p 2. Să se determine imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3\cdot x^2-4\cdot x+5$.

5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{-3x+5}=2$.

5p 4. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a+b=7$.

5p 5. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul $A(-3,1)$ pe dreapta $d:2x-3y+1=0$.

5p 6. Știind că $\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, să se calculeze $\cos 2x$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$ și $C_t=\dfrac{1}{3\cdot t^2}\cdot A+\dfrac{t}{3}\cdot B,\ t\in\mathbb{R}^*$.

5p a) Să se calculeze $B\cdot A$.

5p b) Să se demonstreze că $C_x\cdot C_y=C_{x\cdot y},\ (\forall)x,y\in\mathbb{R}^*$.

5p c) Să se demonstreze că , pentru $(\forall)t\in\mathbb{R}^*,\ \det(C_t)\neq 0$.

2. Pe mulțimea $G=[0,\infty)$ se definește operația $x*y=\ln\left(e^x+e^y-1\right),(\forall)x,y\in G$.

5p a) Să se demonstreze că dacă $x,y\in G$, atunci $x*y\in G$.

5p b) Să se demonstreze că legea de compoziție "$*$" este asociativă.

5p c) Pentru $n\in\mathbb{N},n\geq 2$, să se determine $x\in G$ astfel încât $\underbrace{x*x*x*\ldots*x}_{de\ n\ ori\ x}=2x$.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{\ln a}\cdot\ln\left(x^2+1\right)$, unde $a>0,\ a\neq 1$.

5p a) Să se calculeze $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.

5p b) Să se determine valorile reale ale lui a, pentru care funcția f este convexă pe $(-1,1)$.

5p c) Utilizând teorema lui Lagrange, să se demonstreze că există $c\in\left(\dfrac{1}{e},e\right)$, astfel încât $\dfrac{c}{c^2+1}=\dfrac{e}{e^2-1}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ având termenul general $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x^2+x+1}dx$.

5p a) Să se calculeze I_0 și I_1.

5p b) Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

5p c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}I_n$.

Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului

BAREM DE EVALUARE MATEMATICĂ M1

♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.

♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem

	Subiectul I	
1.	1	**5p**
2.	$\operatorname{Im} f=\left(-\infty,\frac{19}{3}\right]$	**5p**
3.	Condiții $-3x+5\geq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{5}{3}$; Se ridică ambii membri la puterea a doua $\Rightarrow -3x+5=4 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$.	**2p** **3p**
4.	$\frac{7}{90}$.	**5p**
5.	$2y+3x+7=0$.	**5p**
6.	$\cos 2x=\frac{7}{9}$.	**5p**
	Subiectul II	
1.	a) $B\cdot A=O_3$	**5p**
	b) Demonstrarea cerinței	**5p**
	c) Demonstrarea cerinței	**5p**
2.	a) Demonstrarea cerinței	**5p**
	b) Demonstrarea cerinței	**5p**
	c) $x*x=\ln\left(2e^x-1\right)$; $x*x*x=\ln\left(3e^x-2\right)$; $\underbrace{x*x*x*...*x}_{de\ n\ ori\ x}=\ln\left(ne^x-n+1\right), n\in\mathbb{N}, n\geq 2$ (demonstrarea egalității prin inducție matematică). Mulțimea soluțiilor: $\left\{0,\ln\left(n-1\right)\right\}$	**1p** **2p** **2p**
	Subiectul III	
1.	a) $f'\left(x\right)=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{2x}{x^2+1},\ \forall x\in\mathbb{R}$	**5p**

	b) $f''(x)=\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}$ $f''(x)>0,\forall x\in(-1,1)\Rightarrow$ $a>1$.	**2p** **1p** **2p**
	c) Enunţarea teoremei lui Lagrange; Determinarea relaţiei cerute.	**2p** **3p**
2.	a) $I_0=\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}dx=\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot arctg\frac{(2x+1)\sqrt{3}}{3}\Big\|_0^1=\frac{\sqrt{3}}{9}\cdot\pi$; $I_1=\frac{1}{2}\ln 3-\frac{1}{2}\cdot I_0$.	**3p** **2p**
	b) $x^n\ge x^{n+1},\forall x\in[0,1], iar\ x^2+x+1>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\frac{x^n}{x^2+x+1}\ge\frac{x^{n+1}}{x^2+x+1}\Rightarrow I_n\ge I_{n+1}\Rightarrow$ $(I_n)_n$ descrescător $0\le I_n\le I_0,\forall n\in\mathbb{N}\Rightarrow(I_n)_n$ este mărginit. Finalizare	**2p** **2p** **1p**
	c) $0\le I_n$; $\frac{x^n}{x^2+x+1}\le x^n\Rightarrow I_n\le\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{n+1}$; Aplicând criteriul cleştelui rezultă că limita şirului este 0.	**1p** **2p** **2p**