Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore Moisil"
Ediţia a XXVII-a, Baia Mare, 23–25 martie 2012
Clasa a V-a

P1. Aflaţi numerele $\overline{ab}$ ştiind că $a^4 + a^2 = 5b$.

P2. Pentru construirea unui pod s-au folosit 300 de grinzi din lemn, aluminiu şi ciment. O grindă de lemn cântăreşte 5 kg, una de aluminiu 25 kg iar cea de ciment 30 kg. Toate grinzile la un loc cântăresc 7950 kg. Să se determine numărul de grinzi din fiecare tip de grindă dacă partea de sus a podului cântăreşte 650 kg şi are în componenţă toate grinzile din lemn şi o cincime din numărul grinzilor de aluminiu.

P3. a) Să se arate că numărul $N = n^2 - n$ este un număr par oricare ar fi n un număr natural.
b) Să se arate că numărul $a = 5^{n^2-n+2}$ este o sumă de două pătrate perfecte oricare ar fi n un număr natural.

P4. Pentru n un număr natural nenul se consideră mulţimea

$$A_n = \left\{\overline{0,ab}\,\middle|\,\overline{1,ab} + \overline{2,ab} + \ldots + \overline{n,ab} \in \mathbb{N},\ \ b \neq 0\right\}$$

a) Să se arate că $A_1 = A_2 = A_3 = \emptyset$,
b) Să se determine elementele mulţimii A_{2012},
c) Să se determine cardinalul mulţimii

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{2012}.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru 3 ore.

Soluţie P1. Deoarece b este cifră avem $b \leq 9$, de unde $5 \cdot b \leq 45$, adică $a^4 + a^2 \leq 45$. **(2p)**

Dacă $a \geq 3$ atunci $a^4 \geq 81$, aşadar $a \in \{1, 2\}$. **(2p)**

Pentru $a = 1$ obţinem $5 \cdot b = 2$, imposibil. **(1p)**

Pentru $a = 2$ obţinem $5 \cdot b = 20$, de unde $b = 4$, deci umărul căutat este 24. **(2p)**

Soluţie P2. Se notează cu x, y, z numărul de grinzi din lemn, aluminiu şi respectiv ciment. Avem ecuaţiile: $x + y + z = 300$, $5x + 25y + 30z = 7950$ şi $5x + 5y = 650$. **(2p)**

Din ultima ecuaţie rezultă $x + y = 130$. Înlocuind în prima ecuaţie se obţine $z = 170$. **(2p)**

Înlocuind pe z în a doua ecuaţie rezultă $x + 5y = 570$. **(1p)**

Din ultimele relaţii se obţine $x = 30$ şi apoi $y = 100$. Deci s-au folosit 30 grinzi de lemn, 100 grinzi de aluminiu şi 170 grinzi de ciment. **(2p)**

Soluţie P3.

a) Dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $n = 2k$ sau $n = 2k + 1$, unde $k \in \mathbb{N}$.

Presupunem că n este un număr par, deci $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci $N = 4k^2 - 2k = 2\left(2k^2 - k\right)$ este un număr par. **(2p)**

Presupunem că n este un număr impar, deci $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Atunci $N = (M_2 + 1) - (2k + 1) = M_2 - 2k$ este un număr par.

În concluzie $N = n^2 - n$ este un număr par, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. **(2p)**

b) Cum $N = n^2 - n$ este un număr par, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, rezultă că oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$, există $p \in \mathbb{N}$ astfel încât $n^2 - n = 2p$. **(1p)**

Atunci

$$a = 5^2 \cdot 5^{n^2-n} = \left(3^2 + 4^2\right) \cdot 5^{2p} = (3 \cdot 5^p)^2 + (4 \cdot 5^p)^2,$$

ceea ce arată că a este suma pătratelor numerelor naturale $3 \cdot 5^p$ şi $4 \cdot 5^p$. **(2p)**

Soluţie P4. Fie $S_n = \overline{1, ab} + \overline{2, ab} + \ldots + \overline{n, ab}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Atunci

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + n \cdot \frac{10a + b}{100}, \ \ n \in \mathbb{N}.$$

(2p)

Pentru ca $S_n \in \mathbb{N}$ este necesar ca $n \cdot \frac{10a+b}{100} \in \mathbb{N}$. **(1p)**

a) Pentru $n = 1$ se obţine $S_1 = \overline{1, ab} \notin \mathbb{N}$, deoarece $b \neq 0$. Deci $A_1 = \emptyset$. Pentru $n = 2$ se obţine $S_2 = \overline{1, ab} + \overline{2, ab} = 3 + \dfrac{10a + b}{50} \notin \mathbb{N}$, deoarece $10a + b \notin M_{50}$, pentru $b \neq 0$. Deci $A_2 = \emptyset$. Pentru $n = 3$ se obţine

$S_3 = 6 + 3 \cdot \dfrac{10a+b}{100} \notin \mathbb{N}$, deoarece $30a + 3b \notin M_{100}$, pentru $b \neq 0$. Deci $A_3 = \emptyset$. În concluzie, $A_1 = A_2 = A_3 = \emptyset$. **(2p)**

b) Pentru $n = 2012$ se obţine

$$S_{2012} = 1006 \cdot 2013 + 2012 \cdot \frac{10a+b}{100} = 1006 \cdot 2013 + 503 \cdot \frac{10a+b}{25} \in \mathbb{N},$$

dacă $10a + b \in M_{25}$, cu $b \neq 0$. Deci $A_{2012} = \{0,25; 0,75\}$. **(2p)**

c) Mulţimea A_n va avea cele mai multe elemente dacă $n \vdots 100$. Mai exact, $|A_{100n}| = 90$ şi $A_m \subset A_{100n}$ oricare ar fi $m, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Astfel $|A| = 90$. **(1p)**