Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a X-a

Problema 1. Fie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$|f(x)-f(y)|\leq|\sin x-\sin y|,$$

pentru orice $x,y\in[0,\infty)$. Demonstraţi că f este mărginită şi periodică, iar funcţia $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ definită prin $g(x)=x+f(x)$ este monotonă.

Problema 2. a) Determinaţi toate soluţiile reale ale ecuaţiei $2^x=x+1$;
b) Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ astfel încât

$$f(f(x))=2^x-1,$$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Demonstraţi că $f(0)+f(1)=1$.

Gazeta Matematică

Problema 3. Fie şirul de numere naturale $(a_n)_{n\geq1}$ astel încât $a_n\leq n$, pentru orice $n\geq1$ şi

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{\pi a_k}{n}=0,$$

pentru orice $n\geq2$.
a) Aflaţi a_2.
b) Determinaţi termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq1}$ în funcţie de $n\in\mathbb{N}^*$

Problema 4. Fie a şi b două numere raţionale astfel încât numărul complex $z=a+ib$ să aibă modulul 1.

Arătaţi că modulul numărului complex $z_n=1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}$ este un număr raţional pentru orice n impar.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a X-a
Soluţii şi bareme orientative

Problema 1. Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$|f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|,$$

pentru orice $x, y \in [0, \infty)$. Demonstraţi că f este mărginită şi periodică, iar funcţia $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = x + f(x)$ este monotonă.

Soluţie. Alegând, de exemplu, $y = \pi$, obţinem $|f(x)| - |f(\pi)| \leq |f(x) - f(\pi)| \leq |\sin x| \leq 1$, deci pentru orice $x \in [0, \infty)$ avem $|f(x)| \leq |f(\pi)| + 1$. Aşadar f este mărginită. . . . . 2 puncte

Mai mult, pentru $y = x + 2\pi$ avem

$$|f(x) - f(x + 2\pi)| \leq |\sin x - \sin(x + 2\pi)| = 0,$$

deci f are perioada 2π. . . . . 1 punct

Din $|\sin x| \leq |x|$, deducem $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ . . . . 1 punct

Ultima inegalitate conduce la

$$-1 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 1 \quad \text{sau} \quad 0 \leq \frac{x + f(x) - y - f(y)}{x - y},$$

ceea ce este echivalent cu g crescătoare . . . . 3 puncte

Problema 2. a) Determinaţi toate soluţiile reale ale ecuaţiei $2^x = x + 1$;
b) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(f(x)) = 2^x - 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $f(0) + f(1) = 1$.

Gazeta Matematică

Soluţie.
a) Observăm că $x = 0$ şi $x = 1$ sunt soluţii 1p

Ecuaţia $2^x = x + 1$ are cel mult două soluţii deoarece grafic acestea reprezintă intersecţia graficului unei funcţii convexe cu o dreaptă 2p

b) Din $f(x) = f(y)$ deducem $f(f(x)) = f(f(y))$ deci $2^x = 2^y$. adică $x = y$, prin urmare f este injectivă. 1p

Avem $f(2^x - 1) = 2^{f(x)} - 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ . . . . 1 punct

Cum $f(0)$ şi $f(1)$ sunt soluţiile ecuaţiei $2^t - 1 = t$, avem $f(0), f(1) \in \{0, 1\}$ iar din injectivitatea funcţiei f avem că $f(0) + f(1) = 1$ . . . . 2 puncte

Problema 3. Fie şirul de numere naturale $(a_n)_{n\geq 1}$ astel încât $a_n \leq n$, pentru orice $n \geq 1$ şi

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{\pi a_k}{n} = 0,$$

pentru orice $n \geq 2$.

a) Aflaţi a_2.

b) Determinaţi termenul general al şirului $(a_n)_n$ în funcţie de $n \in \mathbb{N}^*$

Soluţie.

Evident $a_1 = 1$

Din relaţia $\cos \frac{\pi a_1}{3} + \cos \frac{\pi a_2}{3} = 0$ se obţinem $a_2 = 2$ .... 2 puncte

Prin inducţie presupunem că $a_k = k, k = \overline{1, n-1}$ şi din ipoteză obţinem

$$\cos \frac{\pi a_n}{n+1} = -\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{\pi k}{n+1}$$

....1 punct

Considerăm umărul $z = \cos \frac{\pi}{n+1} + i \sin \frac{\pi}{n+1}$. Avem

$$z + z^2 + z^3 + ... + z^n = \frac{z - z^{n+1}}{1-z} = \frac{1+z}{1-z}.$$

....1 punct

Deoarece $\overline{z} = \frac{1}{z}$ obţinem că

$$\overline{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)} = -\frac{1+z}{1-z},$$

deci $Re \frac{1+z}{1-z} = 0$, adică

$$\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{\pi k}{n+1} = 0.$$

Atunci

$$\cos \frac{\pi a_k}{n+1} = \cos \frac{\pi n}{n+1}.$$

Deoarece $a_n \leq n$ rezultă $a_n = n$ .... 3 puncte

Observaţie. Se acordă 3 puncte pentru orice modalitate de calcul a sumei $\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{\pi k}{n+1}$.

Problema 4. Fie a şi b două numere raţionale astfel încât numărul complex $z = a + ib$ să aibă modulul 1.

Arătaţi că modulul numărului complex $z_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ este un număr raţional pentru orice n impar.

Soluţie. Fie $z = \cos t + i \sin t$, $t \in [0, 2\pi), \sin t, \cos t \in \mathbb{Q}$. Pentru $z = 1$ concluzia este trivială.

Dacă $z \neq 1$ avem

$$|z_n| = |1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}| = \left|\frac{z^n - 1}{z - 1}\right|.$$

....2 puncte

Pentru $n = 2k + 1 \in \mathbb{N}$ avem

$$\left|\frac{z^n - 1}{z - 1}\right| = \left|\frac{\sin\frac{(2k+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right|.$$

....2 puncte

Rămâne să arătăm că $x_k = \frac{\sin\frac{(2k+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ este număr raţional.

Avem $x_{k+1} - x_k = 2\cos(k+1)t$ cu $x_0 = 1 \in \mathbb{Q}$. Cum $\cos(k+1)t = Re\ z^{k+1} = Re\ (a + ib)^{k+1} \in \mathbb{Q}$, prin inducţie rezultă $x_k \in \mathbb{Q}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. .... 3 puncte

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a XI-a

Problema 1. Pentru un număr real $a > 1$ dat, considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a$ şi

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_{n+1},$$

pentru orice $n \geq 1$. Arătaţi că şirul este convergent şi determinaţi limita sa.

Gazeta Matematică

Problema 2. Fie matricele pătrate A, B de ordin 3 cu elemente numere reale astfel încât $AB = O_3$.

a) Demonstraţi că funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată de $f(x) = \det(A^2 + B^2 + xBA)$ este polinomială de grad cel mult 2.

b) Demonstraţi că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi matricile $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $A \cdot B^2 = A - B$.

a) Arătaţi că matricea $I_n + B$ este inversabilă;

b) Arătaţi că $AB = BA$.

Problema 4. O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea $\mathcal{F}$ dacă pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există un interval (b, a) astfel încât pentru orice $x \in (b, a)$ să avem $f(x) \leq f(a)$.

a) Daţi un exemplu de funcţie cu proprietatea $\mathcal{F}$ nemonotonă pe $\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că dacă f este continuă şi are proprietatea $\mathcal{F}$, atunci f este crescătoare.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a XI-a SOLUŢII ŞI BAREMURI ORIENTATIVE

Problema 1. Pentru un număr real $a > 1$ dat, considerăm şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ definit prin $x_1 = a$ şi

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} = x_1 x_2 \cdots x_{n+1},$$

pentru $n \geq 1$.

Arătaţi că şirul este convergent şi determinaţi limita sa.

Gazeta Matematică

Soluţie. Prin inducţie demonstrăm că $x_n > 0$ şi $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n > 1$ (De exemplu, folosim ipoteza de inducţie $P(n) : x_1, \ldots, x_n > 0, x_1 x_2 \cdots x_n > 1$).
.... 2 puncte

Din inegalitatea mediilor avem

$$x_1 x_2 \cdots x_n \geq n(x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}},$$

de unde $x_1 x_2 \cdots x_n \geq n^{\frac{n}{n-1}}$, aceasta atrăgând $\lim\limits_{n\to\infty} x_1 x_2 \cdots x_n = \infty$
.... 3 puncte

De aici

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 x_2 \cdots x_{n-1}}{x_1 x_2 \cdots x_{n-1} - 1} = 1$$

.... 2 puncte

Problema 2. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ cu $AB = O_3$.

a) Demonstraţi că funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dată de $f(x) = \det(A^2 + B^2 + xAB)$ este polinomială de gradul cel mult 2.

b) Demonstraţi că $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

Soluţie.

a) Cum $\det(AB) = 0$ obţinem $f(x) = \det(A^2 + B^2) + ax + bx^2$.
.... 2 puncte

b) Dar $f(i) = \det(A^2 + B^2 + iBA) = \det(A^2 + B^2 + i(BA - AB)) = \det(A + iB)\det(A - iB)$. Deducem $f(i) = f(-i)$ de unde $a = 0$.
.... 2 puncte

Din $f(i) = |\det(A + iB)|^2 \geq 0$ rezultă $\det(A^2 + B^2) - b \geq 0$
.... 1 punct

Pe de altă parte $f(1) = \det(A^2 + B^2 + AB + BA) = \det(A + B)^2 \geq 0$, de unde $\det(A^2 + B^2) + b \geq 0$. Prin adunarea ultimelor inegalităţi obţinem $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

.... 2 puncte

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ cu proprietatea că $AB^2 = A - B$.

a) Arătaţi că matricea $I_n + B$ este inversabilă;

b) Arătaţi că $AB = BA$.

Soluţie. a) Din relaţia dată avem

$$AB^2 - AB + B + AB - A + I_n = I_n$$

ceea ce se scrie $(AB - A + I_n)(I_n + B) = I_n$ .... 3 puncte

b) Relaţia de inversabilitate se scrie şi $(I_n + B)(AB - A + I_n) = I_n$ sau $BAB + AB - BA = A - B$, ceea ce se scrie $AB^2 = BAB + AB - BA$ adică $(AB - BA)(B - I_n) = 0_n$ (1) .... 2 puncte

În mod analog se obţine relaţia $(AB + A + I_n)(I_n - B) = I_n$ care atrage din inversabilitate $(I_n - B)(AB + A + I_n) = I_n$ ce devine prin efectuarea înmulţirilor $(AB - BA)(B + I_n) = 0_n$ (2) .... 2 puncte

Prin scăderea relaţiilor (1) şi (2) obţinem $AB - BA = O_n$.

Problema 4. O funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are proprietatea $\mathcal{F}$ dacă pentru orice $a \in \mathbb{R}$ există un interval (b, a) astfel încât pentru orice $x \in (b, a)$ să avem $f(x) \leq f(a)$.

a) Daţi un exemplu de funcţie cu proprietatea $\mathcal{F}$ nemonotonă pe $\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că dacă f este continuă şi are proprietatea $\mathcal{F}$, atunci f este crescătoare.

Soluţie. a) Funcţia definită pe $\mathbb{R}$ prin $f(x) = 0$ dacă $x \neq 0$ şi $f(0) = 1$ este în $\mathcal{F}$ şi nu este monotonă. .... 2 puncte

b) Să presupunem că f nu este crescătoare. Fie atunci $x_1 < x_2$ astfel încât $f(x_1) > f(x_2)$. Considerăm mulţimea

$$M = \{x \in (x_1, x_2) \mid f(x) \leq f(x_2)\}.$$

Din ipoteză M este nevidă şi evident mărginită. Prin urmare există $a = \inf M$. .... 2 puncte

Din continuitate avem $f(a) \leq f(x_2)$ .... 1 punct

Dacă $a \in (x_1, x_2)$ există $b < a$, $b \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f(x) \leq f(a) \leq f(x_2)$ pentru orice $x \in (b, a)$, ceea ce contrazice alegera lui a. Rezultă $a = x_1$, deci $f(x_1) \leq f(x_2)$, contradicţie .... 2 puncte

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a XII-a

Problema 1. Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive, distincte două câte două. Să se calculeze

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Problema 2. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel cu 9 elemente. Să se arate că următoarele două afirmaţii sunt echivalente:

(a) Pentru orice $x \in A \setminus \{0\}$ există $a \in \{-1,0,1\}$ şi $b \in \{-1,1\}$, astfel încât $x^2+ax+b=0$.

(b) $(A,+,\cdot)$ este corp.

Problema 3. Fie G un grup finit cu n elemente şi e elementul său neutru. Să se determine toate funcţiile $f : G \to \mathbb{N}^*$ care îndeplinesc simultan următoarele două condiţii:

(a) $f(x) = 1$ dacă şi numai dacă $x = e$; şi

(b) $f(x^k) = f(x)/(f(x),k)$, pentru orice divizor natural k al lui n, unde (r,s) este cel mai mare divizor comun al numerelor naturale r şi s.

Gazeta Matematică

Problema 4. Fie $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, astfel încât $f(0) = f(1) = 0$ şi $|f'(x)| \le 1$, oricare ar fi $x \in [0,1]$. Să se arate că

$$\left|\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right| < 1/4.$$

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a XII-a — Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Fie a, b, c trei numere reale strict pozitive, distincte două câte două. Să se calculeze

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\,\mathrm{d}x.$$

Soluţie. Din

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{b^2-a^2}\int_0^t \left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+b^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\arctan\frac{t}{a} - \frac{1}{b}\arctan\frac{t}{b}\right) \\ &\xrightarrow{t\to\infty} \frac{1}{ab(a+b)}\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

. . . . **4 puncte**

rezultă că

$$\begin{aligned}&\int_0^t \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\,\mathrm{d}x = \\ &\frac{1}{c^2-a^2}\left(\int_0^t \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x - \int_0^t \frac{1}{(x^2+b^2)(x^2+c^2)}\,\mathrm{d}x\right) \xrightarrow{t\to\infty} \\ &\frac{1}{c^2-a^2}\left(\frac{1}{ab(a+b)} - \frac{1}{bc(b+c)}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{a+b+c}{abc(a+b)(b+c)(c+a)}\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

. . . . **3 puncte**

Problema 2. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel cu 9 elemente. Să se arate că următoarele două afirmaţii sunt echivalente:

(a) Pentru orice $x \in A \setminus \{0\}$ există $a \in \{-1,0,1\}$ şi $b \in \{-1,1\}$, astfel încât $x^2+ax+b=0$.

(b) $(A,+,\cdot)$ este corp.

Soluţie. Arătăm că prima afirmaţie o implică pe a doua. Fie $x \in A \setminus \{0\}$ şi a, b cu proprietatea din enunţ. Întrucât $ax = xa$, rezultă că $x(x+a) = (x+a)x = -b \in \{-1,1\}$, deci x este inversabil şi prin urmare A este corp.

. . . . **3 puncte**

Arătăm că a doua afirmaţie o implică pe prima. Întrucât A nu are divizori ai lui zero şi $(1+1+1)(1+1+1)=0$, rezultă că $1+1+1=0$.

. . . . **1 punct**

Fie $x \in A \setminus \{0\}$. Dacă $x^2 = \pm 1$, atunci $x^2 - 1 = 0$ sau $x^2 + 1 = 0$, deci x are proprietatea din enunţ.

. . . . **1 punct**

Dacă $x^2 \neq \pm 1$, ţinând cont de faptul că $(A^*, \cdot)$ este grup cu opt elemente, rezultă că $(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1) = x^8 - 1 = 0$, deci $x^4 + 1 = 0$. Întrucât $x^4 + 1 = x^4 + 4 = (x^2+2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2) = (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$, rezultă că $x^2 + x - 1 = 0$ sau $x^2 - x - 1 = 0$.

. . . . **2 puncte**

Problema 3. Fie G un grup finit cu n elemente şi e elementul său neutru. Să se determine toate funcţiile $f : G \to \mathbb{N}^*$ care îndeplinesc simultan următoarele două condiţii:

(a) $f(x) = 1$ dacă şi numai dacă $x = e$; şi

(b) $f(x^k) = f(x)/(f(x), k)$, pentru orice divizor natural k al lui n, unde (r, s) este cel mai mare divizor comun al numerelor naturale r şi s.

Soluţie. Fie x un element al lui G şi $\operatorname{ord} x$ ordinul său. Întrucât $\operatorname{ord} x$ divide pe n, rezultă că $1 = f(e) = f(x^{\operatorname{ord} x}) = f(x)/(f(x), \operatorname{ord} x)$, deci $f(x)$ este un divizor al lui $\operatorname{ord} x$.

. . . . **2 puncte**

Deci $f(x)$ divide pe n, de unde $f(x^{f(x)}) = f(x)/(f(x), f(x)) = 1$ şi prin urmare $x^{f(x)} = e$. Rezultă că $\operatorname{ord} x$ este un divizor al lui $f(x)$, deci $f(x) = \operatorname{ord} x$.

. . . . **2 puncte**

Reciproc, arătăm că funcţia $f : G \to \mathbb{N}^*$, $f(x) = \operatorname{ord} x$, îndeplineşte condiţiile din enunţ. Fie x un element al lui G, $m = \operatorname{ord} x$, $k \in \mathbb{N}^*$, $p = \operatorname{ord} x^k$ şi $d = (m, k)$. Întrucât $(x^k)^{m/d} = (x^m)^{k/d} = e$, rezultă că p divide pe m/d.

. . . . **1 punct**

Pe de altă parte, $x^{kp} = (x^k)^p = e$, deci m divide pe kp şi prin urmare m/d divide pe $(k/d)p$. Numerele m/d şi k/d fiind coprime, rezultă că m/d este un divizor al lui p, deci $p = m/d$.

. . . . **2 puncte**

Problema 4. Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ o funcţie derivabilă, astfel încât $f(0) = f(1) = 0$ şi $|f'(x)| \leq 1$, oricare ar fi $x \in [0, 1]$. Să se arate că

$$\left| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right| < 1/4.$$

Soluţie. Fie $t \in (0,1)$. Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei f pe intervalele $[0,t]$ şi $[t,1]$, rezultă că $|f(t)/t| \leq 1$ şi $|f(t)/(1-t)| \leq 1$, deci $|f(t)| \leq \min(t, 1-t)$, oricare ar fi $t \in [0,1]$.

.... **3 puncte**

Prin urmare,

$$\left| \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{1/2} |f(t)|\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$$
$$\leq \int_0^{1/2} t\,\mathrm{d}t + \int_{1/2}^1 (1-t)\,\mathrm{d}t = 1/4. \ (*)$$

.... **3 puncte**

Egalitatea în (*) ar forţa $|f(t)| = t$, pentru $0 \leq t \leq 1/2$, şi $|f(t)| = 1 - t$ pentru $1/2 \leq t \leq 1$. Cum $f(1/2) = \pm 1/2$ şi f este derivabilă în $1/2$, rezultă f derivabilă în $1/2$; contradicţie. .... **1 punct**

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012

CLASA a IX-a

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$[x]^5 + \{x\}^5 = x^5.$$

Notă: prin $[x]$ *şi* $\{x\}$ *se notează partea întreagă, respectiv partea fracţionară a numărului real* x*.*

Problema 2. Demonstraţi că, dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \leq \frac{3}{4}.$$

Gazeta Matematică

Problema 3. Un cerc care trece prin vârfurile B şi C ale unui triunghi ABC taie din nou laturile (AB) şi (AC) în N, respectiv M. Luăm punctele $P \in (MN)$, $Q \in (BC)$ astfel încât unghiurile $\angle BAC$ şi $\angle PAQ$ să aibă aceeaşi bisectoare.

a) Arătaţi că

$$\frac{PM}{PN} = \frac{QB}{QC}.$$

b) Arătaţi că mijloacele segmentelor $(BM), (CN), (PQ)$ sunt coliniare.

Problema 4. Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale este crescător, neconstant şi are proprietatea: a_n *divide* n^2*, oricare ar fi* $n \geq 1$. Arătaţi că una dintre următoarele afirmaţii este adevărată:

- există un număr natural n_1 astfel încât $a_n = n$ pentru orice $n \geq n_1$;
- există un număr natural n_2 astfel încât $a_n = n^2$ pentru orice $n \geq n_2$.

Timp de lucru 4 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012
CLASA a IX-a – Soluţii şi barem orientativ

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}$ ecuaţia $[x]^5 + \{x\}^5 = x^5$.

Soluţie. Observăm că, dacă $\{x\} = 0$, atunci ecuaţia este verificată. **2p**

De asemenea, ecuaţia este verificată în cazul când $[x] = 0$. **2p**

Pentru $\{x\} \neq 0$ ecuaţia este $\{x\}^5 = (x - [x])(x^4 + x^3[x] + x^2[x]^2 + x[x]^3 + [x]^4)$, adică $\{x\}^4 = x^4 + x^3[x] + x^2[x]^2 + x[x]^3 + [x]^4$. Dacă $[x] \neq 0$, atunci membrul drept din ultima ecuaţie este suma dintre $[x]^4$ şi patru termeni pozitivi, deci este mai mare decât 1, iar membrul stâng este mai mic decât 1, ceea ce arată că în acest caz nu există soluţii. Aşadar, mulţimea soluţiilor este $[0, 1] \cup \mathbb{Z}$. **3p**

Problema 2. Demonstraţi că, dacă a, b, c sunt numere reale strict pozitive, atunci

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{a+2b+c} + \frac{c}{a+b+2c} \leq \frac{3}{4}.$$

Soluţie. Notăm $S = a + b + c$. **1p**

Membrul stâng este $\frac{a}{S+a} + \frac{b}{S+b} + \frac{c}{S+c} = 3 - S\left(\frac{1}{S+a} + \frac{1}{S+b} + \frac{1}{S+c}\right)$ **2p**

Inegalitatea devine $4S\left(\frac{1}{S+a} + \frac{1}{S+b} + \frac{1}{S+c}\right) \geq 9$. **1p**

Deoarece $4S = (S + a) + (S + b) + (S + c)$ şi $(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 9$ pentru orice $x, y, z > 0$, inegalitatea este demonstrată **3p**

Problema 3. Un cerc care trece prin vârfurile B şi C ale unui triunghi ABC taie din nou laturile (AB) şi (AC) în N, respectiv M. Luăm punctele $P \in (MN)$, $Q \in (BC)$ astfel încât unghiurile $\angle BAC$ şi $\angle PAQ$ să aibă aceeaşi bisectoare.

a) Arătaţi că $\frac{PM}{PN} = \frac{QB}{QC}$.

b) Arătaţi că mijloacele segmentelor $(BM), (CN), (PQ)$ sunt coliniare.

Soluţie. a) Din ipoteză reiese $\angle AMP \equiv \angle ABQ$ şi $\angle MAP \equiv \angle BAQ$, deci $\Delta APM \sim \Delta AQB$, de unde $\frac{MP}{BQ} = \frac{AP}{AQ}$; analog $\frac{NP}{CQ} = \frac{AP}{AQ}$ **2p**

Prin împărţire obţinem concluzia **1p**

b) Fie $\frac{MP}{PN} = \frac{BQ}{QC} = k$. Avem $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AM} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$. **1p**

Pentru mijlocul S al segmentului (BM) avem $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM})$; analog pentru mijloacele T, U ale segmentelor (CN), respectiv (PQ) **1p**

Deducem $\overrightarrow{AU} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AS} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AT}$, de unde concluzia **2p**

Problema 4. Un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere naturale este crescător, neconstant şi are proprietatea: a_n *divide* n^2*, oricare ar fi* $n \geq 1$. Arătaţi că:

– fie există un număr natural n_1 astfel încât $a_n = n$ pentru orice $n \geq n_1$;

– fie există un număr natural n_2 astfel încât $a_n = n^2$ pentru orice $n \geq n_2$.

Soluţie. Deoarece şirul este neconstant, există n_0 astfel încât $a_n > 1$ pentru $n \geq n_0$. Astfel, dacă $p > n_0$ este un număr prim, atunci $a_p = p$ sau $a_p = p^2$ **1p**

În cazul când $a_n \leq n$ pentru orice n, luând un număr prim $p > n_0$ obţinem $a_p = p$. Rezultă apoi inductiv că $a_n = n$ pentru $n \geq p :$ dacă $a_n = n$, atunci $n + 1 \geq a_{n+1} \geq n$ şi $a_{n+1} \mid (n + 1)^2$ implică $a_{n+1} = n + 1$. Aşadar, în acest caz putem lua $n_1 = p$.....**3p**

Rămâne cazul când există $m \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a_m > m$. În acest caz, deoarece $m + 1 \nmid m^2$ (deoarece $m + 1 \mid m^2 - 1$, $m + 1 > 1$ iar m^2 şi $m^2 - 1$ sunt prime între ele) rezultă că $a_m \geq m + 2$, deci $a_{m+1} > m + 1$. Continuând inductiv obţinem $a_n > n$ pentru orice $n \geq m$. În particular, luând un număr prim $p > m$ obţinem $a_p = p^2$. Rezultă apoi inductiv că $a_n = n^2$ pentru $n \geq p :$ dacă $a_n = n^2$, atunci $a_{n+1} \geq n^2 > \frac{1}{2}(n + 1)^2$ (ultima inegalitate fiind valabilă deoarece $n \geq p \geq 3$) şi $a_{n+1} \mid (n + 1)^2$ implică $a_{n+1} = (n + 1)^2$. Aşadar, în acest caz putem lua $n_2 = p$ **3p**